Modelos Estocásticos I

Problemas 5

Los problemas 1 y 2 son para entregar en hojas separadas el lunes 12/09/16

1. La densidad de una variable con distribución triangular está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & 0 \le x \le 1, \\ 2-x & 1 \le x \le 2, \\ 0 & x > 2. \end{cases}$$

   Describa dos métodos para generar valores a partir de esta distribución.

2. Sean $(X_n)_n$ v.a. independientes, igualmente distribuidas con distribución exponencial $P(X_n \ge x) = e^{-\lambda x}, x \ge 0$. Calcular la distribución de la variable $M_n = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$ y estudiar su convergencia en distribución. Probar que $M_n - (\log n)/\lambda \xrightarrow{d} X$, donde X es una v.a. con función de distribución $F(x) = e^{-e^{-\lambda x}}$.

3. Describa un algoritmo eficiente para simular una v.a. X con función de probabilidad

$$P(X = 1) = 0.2; \quad P(X = 2) = 0.25; \quad P(X = 3) = 0.4; \quad P(X = 4) = 0.15.$$

4. Describa dos métodos para generar valores de una variable aleatoria X tal que

$$P(X = i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i/i!}{\sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^j/j!}, \quad i = 0, \dots k.$$

5. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con densidad $f(x) = e^x/(e-1)$, $0 \le x \le 1$.

6. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = (x^2 + x)/2$, $0 \le x \le 1$

7. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución Beta de densidad $f(x) = 6x(1-x)$, $0 \le x \le 1$

8. Describa cómo se puede generar valores de una variable aleatoria con la distribución Beta del ejemplo anterior, usando el método de rechazo.

9. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con función de distribución $F(x) = 1 - \exp(-\alpha x^\beta)$, para $0 < x < \infty$.

10. Describa un método para generar valores de una variable aleatoria con densidad $f(x) = e^{-2|x|}$ para $x \in \mathbb{R}$.

11. Si X es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ, halle la distribución de la parte entera de X, $Y = [X]$. Use este resultado para explicar el método de generación de variables geométricas que vimos en clase.

12. Use el método de la transformada inversa para generar valores de una variable aleatoria con distribución Gumbel:

$$F(x) = \exp\{\exp(-(x-\mu)/\theta)\}$$

13. Use el método de la transformada inversa para generar valores de una variable aleatoria con distribución Pareto:

$$F(x) = 1 - x^{-\alpha}, \qquad x \ge 1.$$

14. Describa cómo se puede simular una variable aleatoria con distribución logística de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \qquad -\infty \le x \le \infty$$

usando el método de rechazo basado en la distribución exponencial de parámetro 1.

15. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias que converge c.s. a 0. Probar que $(X_1+\cdots+X_n)/n$ converge c.s. a 0. Dar un ejemplo que demuestre que el resultado no es cierto para la convergencia en probabilidad.

16. Probar que si $(X_n)_n$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribuciones $U(a,b)$, entonces $M_n = \sup_{k<n} X_k$ converge c.s..

17. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias que converge en probabilidad a la variable aleatoria X, y f una función uniformemente continua. Probar a partir de la definición de convergencia en probabilidad que la sucesión $(f(X_n))_n$ converge en probabilidad. (El resultado también es cierto si f es continua, pero es un poco más difícil de probar).

18. Sean $(X_n)_n$ v.a.i.i.d. con función de distribución

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0, \\ 1-(1-x)^\lambda & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

Probar que si $M_n = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$ entonces $n^{1/\lambda} M_n - n^{1/\lambda} \xrightarrow{L} X$, donde X es una v.a. con función de distribución $F(x) = e^{-(-x)^\lambda}$ si $x \le 0$ y $F(x) = 1$ para $x > 0$.

19. Dar un ejemplo que pruebe que $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} Y$ no implica $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$.

20. Dar ejemplos de: a) Variables que converjan en ley y sus densidades no converjan.

    b) Sucesiones de variables con densidad que converjan a una variable sin densidad.

    c) Variables con distribución discreta que converjan a una que tenga densidad.

21. En el libro *Stochastic Processes with Applications*, de R. N. Bhattacharya & E. C. Waymire (Wiley, 1990), pag. 109, se da la siguiente definición:

    Definition 1.1 A stochastic process $\{X_0, X_1, \dots, X_n, \dots\}$ has the *Markov property* if, for each n and m, the conditional distribution of $X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ given $X_0, X_1, \dots, X_n$ is the same as its conditional distribution given X_n alone. A process having the Markov property is called a *Markov Process*. If, in addition, the state space of the process is countable, then a Markov process is called a *Markov chain*.

    Por otro lado, Z. Brzezniak & T. Zastawniak en el libro *Basic Stochastic Processes* (Springer, 1999), pag. 88, se da esta otra definición

    Definition 5.1 Suppose that S is a finite or a countable set. Suppose also that a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is given. An S-valued sequence of random variables $\xi_n, n \in \mathbb{N}$, is called an S-valued *Markov chain* or a Markov chain on S if for all $n \in \mathbb{N}$ and all $s \in S$

$$P(\xi_{n+1} = s|\xi_0, \dots, \xi_n) = P(\xi_{n+1} = s|\xi_n).$$

    Finalmente, S. Karlin & H. M. Taylor en el libro *A First Course in Stochastic Processes* (Academic Press, 1975), pag. 29, dicen:

    In formal terms a process is said to be Markov if

$$Pr\{a < X_t \le b | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n\} = Pr\{a < X_t \le b | X_{t_n} = x_n\}$$

    whenever $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$.

    ... A Markov process having a finite or denumerable state space is called a Markov chain.

    ¿Qué diferencias importantes hay entre estas definiciones? ¿Son equivalentes? Razone su respuesta.