Modelos Estocásticos I

Problemas 4

Los problemas 1 y 2 son para entregar en hojas separadas el lunes 05/09/16

1. Considere el siguiente experimento en dos etapas: primero escogemos un punto X con distribución uniforme en $(0,1)$; después escogemos un punto Y con distribución uniforme en $(-X,X)$. El vector aleatorio (X,Y) representa el resultado del experimento. ¿Cuál es su densidad conjunta? ¿Cuál es la densidad marginal de Y? ¿Cuál es la densidad condicional de X dada Y?

2. Definimos la varianza condicional de X dada Y por $\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}(X^2|Y) - [\mathrm{E}(X|Y)]^2$ Sean X, Y variables aleatorias con segundo momento finito. (a) Demuestre que $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y|X))$.
(b) Sea Z otra v.a. Demuestre la siguiente fórmula $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[\mathrm{Cov}((X,Y|Z))] + \mathrm{Cov}(\mathrm{E}(X|Z), \mathrm{E}(Y|Z))$, donde definimos $\mathrm{Cov}((X,Y)|Z) = \mathrm{E}(XY|Z) - \mathrm{E}(X|Z)\,\mathrm{E}(Y|Z)$.

3. Escogemos cinco puntos al azar de manera independiente en el intervalo $[0,1]$. Sea X el número de puntos que pertenecen al intervalo $[0,c]$, donde $0 < c < 1$ es un número fijo. ¿Cuál es la distribución de X?

4. Una caja tiene tres bolas numeradas 1, 2 y 3. Sacamos dos bolas al azar, sucesivamente y sin reposición. Sea X el número en la primera e Y el número en la segunda. (a) Describa la distribución conjunta de X e Y. (b) Calcule $P(X < Y)$. (c) Determine las distribuciones marginales de las variables X e Y. ¿Son independientes?

5. Seleccionamos al azar un punto en el círculo unitario $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ y sean (X,Y) las coordenadas del punto seleccionado. (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de (X,Y)? (b) Determine $P(X < Y)$, $P(X > Y)$, $P(X = Y)$.

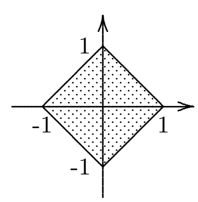
6. Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta $F(x,y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$ para $x, y \geq 0$ y $F(x,y) = 0$ en cualquier otro caso. Halle la densidad conjunta y las densidades marginales. ¿Son X e Y independientes?

7. Sea X, Y, Z variables aleatorias independientes cada una con distribución uniforme en $[0,1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $Xt^2 + Yt + Z = 0$ tenga soluciones reales?

8. Sean $X \sim \mathcal{U}[0,a]$, $Y \sim \mathcal{U}[a, a+b]$, donde $a, b > 0$ variables aleatorias independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres segmentos $[0,X]$, $[X,Y]$, $[Y, a+b]$ puedan formar un triángulo?

9. Seleccionamos al azar (es decir, con distribución uniforme) un punto en la siguiente región

   Sean X e Y las coordenadas del punto.
   (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?
   (b) Obtenga la densidad marginal de X.
   (c) ¿Son X e Y independientes?



10. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.i. con distribución exponencial de parámetros respectivos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (a) Demuestre que la distribución de $Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ también es exponencial ¿Cuál es su parámetro? (b) Demuestre que para $k = 1, \dots, n$
$$P(X_k = \min_{1 \leq i \leq n} X_i) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$
(*Sugerencia:* X_k e Y son independientes y tienen distribución exponencial. Considere el evento $\{X_k < \min_{i \neq k} X_i\}$).

11. Sea X una variable cuya función de distribución F es continua en la recta. Demuestre que la distribución de $Y = F(X)$ es $\mathcal{U}[0,1]$.

12. Sea A el triángulo de vértices $(0,0); (1,0); (0,1)$ y suponga que X, Y tienen densidad conjunta $f(x,y) = C\mathbf{1}_A(x,y)$. (a) Determine el valor de la constante C. (b) Halle las distribuciones marginales de X e Y y la de $Z = X + Y$. (c) ¿Son X e Y independientes? ¿Por qué?

13. Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que $U = (X+Y)/\sqrt{2}$ y $V = (X-Y)/\sqrt{2}$ también son independientes y tienen distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

14. Sea X una v.a. $\mathcal{N}(0,1)$. Calcule la densidad de $Y = X^4$ y la de $Z = 1/X$. ¿Tienen densidad conjunta Y y Z? ¿Por qué?

15. Sean X, Y v. a. i. tales que $X \sim Bin(m,p)$ e $Y \sim Bin(n,p)$. Obtenga la distribución condicional de X dada $X+Y$. ¿Cómo se llama esta distribución?

16. Suponga que (X,Y) tiene distribución uniforme en A, donde A es una región del plano de área positiva y finita. Demuestre que la distribución condicional de X dado que $Y = y$ es uniforme en A_y, la sección de A en y, que definimos $A_y = \{x : (x,y) \in A\}$.

17. Demuestre que si $P(X \in B|Y = y) = P(X \in B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e $y \in \mathbb{R}$, entonces X e Y son independientes.

18. Sea X una v.a. con densidad $f(x)$, f continua. ¿Cuál es la distribución condicional de X dada $|X|$?

19. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.i.i.d. con distribución continua F. Sea $X = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. (a) Demuestre que para todo $k = 1, 2, \dots, n$,
$$P(X_k \leq x|X = t) = \begin{cases} \frac{(n-1)F(x)}{nF(t)}, & \text{si } x < t, \\ 1, & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$
(*Sugerencia:* $x^n - y^n = (x-y)(X^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$). (b) Suponga que F es diferenciable. ¿Existe la densidad condicional para la distribución anterior?

20. Sean $X,\ Y$ v.a. tales que $\mathrm{E}(X^2) < \infty$, $\mathrm{E}(Y^2) < \infty$. Demuestre que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, \mathrm{E}(Y|X))$.

21. Suponga que $X,\ Y$ tienen densidad conjunta $f(x,y) = \frac{1}{\pi}$, si $x^2+y^2 \leq 1$ y 0 en otro caso. (a) Halle la distribución condicional de Y dada X. Calcule $\mathrm{E}(Y|X)$. (b) ¿Son $X,\ Y$ independientes? ¿Por qué? (c) Demuestre que estas variables no están correlacionadas.

22. Sean X, Y v.a.i. con distribución $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. ¿Cuál es la distribución condicional de (X,Y) dada $\sqrt{X^2+Y^2}$, la distancia de (X,Y) al origen?

23. X es una v.a. cuya distribución tiene las siguientes propiedades: Para todo $n \geq 1$, $P(X = 2n) = \frac{1}{2}P(X = 2n-1) = \frac{2}{3}P(X = 2n+1)$. Además, $P(X = 0) = \frac{2}{3}P(X = 1)$. Calcule la f.g.p. de X.

24. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. (a) Halle la función generadora de momentos de X. (b) Demuestre que $\mathrm{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. (c) Sean $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$, demuestre que $X_1 + X_2$ tiene distribución normal y halle sus parámetros. (d) Si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ demuestre que todos sus momentos de orden impar valen 0 y para los de orden par vale la siguiente fórmula: $\mathrm{E}(X^{2n}) = (2n)!\sigma^{2n}/2^n n!$ para $n \geq 1$.

25. La variable aleatoria X con valores enteros no-negativos tiene función generadora de probabilidad $\phi_X(t) = \log\frac{1}{1-qt}$. Determine la función de probabilidad para X y halle $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

26. Sean $N, X_1, X_2, \dots$ v.a.i., N con distribución $P(N = k) = (1-p)^{k-1}p$ para $k \geq 1, 0 < p < 1$ y suponga que las X_i son todas exponenciales de parámetro λ. Halle la distribución de $Z = \sum_{j=1}^N X_j$ usando funciones generadoras de probabilidad.

27. Juan lanza un dardo a una diana y la probabilidad de que acierte la diana en cada disparo es 1/2. Dado que acierta la diana, la probabilidad de que acierte el centro de la diana es p. Juan lanza mientras acierte a la diana. Sea X el total de aciertos al centro de la diana cuando Juan termina de lanzar. Halle su distribución.

28. Felipe lanza un dado balanceado hasta obtener un cuatro. Luego Diana lanza una moneda balanceada tantas veces como Felipe lanzó el dado. Determine el valor esperado y la varianza del número de (a) águilas, (b) soles, (c) águilas y soles que obtiene Diana.

29. Sea $X \sim \mathcal{U}[0,a]$. Halle la función generadora de momentos de X y determine para qué valores de t existe.

30. Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Halle la función generadora de momentos y la densidad de X^2.

31. Sea X una v.a. con función de probabilidad $p_X(k) = \frac{1}{2}q^{|k|-1}p$, con $0 < q = 1-p < 1$. Halle la f.g.p. y la f.g.m para esta variable aleatoria.

32. Demuestre usando las funciones generadoras de momentos que una variable X con densidad $e^{|x|}/2,\ x \in \mathbb{R}$ se puede escribir como $X = Y_1 - Y_2$, con Y_1, Y_2 v.a.i. con distribución exponencial.