Modelos Estocásticos I

Lista de Problemas 15

Los problemas 1 y 2 son para entregar en hojas separadas el lunes 21/11/16

1. El número de impactos que recibe un sistema sigue un proceso de Poisson de intensidad λ (ver ejemplo 4.6 en las notas). El i-ésimo impacto produce un daño D_i y suponemos que estas son v.a.i.i.d. e independientes del proceso $N(t)$. Suponemos además que el daño producido por un impacto decrece exponencialmente en el tiempo, es decir, si inicialmente el daño es D, al cabo de un tiempo t el daño es $De^{-\alpha t}$. Si suponemos que los daños son aditivos, el daño total en el instante t se puede escribir

$$D(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i e^{-\alpha(t-\tau_i)}$$

donde τ_i es el momento en el cual ocurre el i-ésimo impacto. Calcule $\mathrm{E}(D(t))$

2. N bacterias se distribuyen independientemente y de manera uniforme en un slide de microscopio de área A. Se selecciona una región de área a al azar para hacer la observación. Determine la probabilidad de que k bacterias se encuentren en la región de área a. Demuestre que si $N \to \infty$ y $a \to 0$ de modo que $(a/A)N \to c$, $(0 < c < \infty)$ entonces $p(k) \to e^{-c}c^k/k!$.

3. (Cómo generar variables de Poisson.) Sean $U_1, U_2, \ldots$ v.a.i. con distribución uniforme en $(0,1)$.

   (a) Si $X_i = (-\log U_i)/\lambda$, muestre que X_i tiene distribución exponencial de parámetro λ.

   (b) Use el resultado anterior para demostrar que si definimos N como el valor de n que satisface $\prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i$, entonces N tiene distribución de Poisson con media λ.

4. Sean $T_1, T_2, \ldots$ v.a.i. exponenciales de parámetro λ y sea N una variable independiente con $P(N = n) = p(1-p)^{n-1}$. ¿Cuál es la distribución de la suma aleatoria $T = T_1 + \cdots + T_N$?

5. Un submarino tiene tres instrumentos de navegación pero sólo puede permanecer en alta mar si al menos dos de ellos están trabajando. Suponga que los tiempos de vida de los instrumentos son exponenciales con medias 1 año, 1.5 años y 3 años. ¿Cuál es el tiempo promedio que el submarino puede permanecer en alta mar?

6. Los clientes llegan a un banco según un proceso de Poisson con intensidad de 10 por hora. Dado que dos clientes llegaron en los primeros 5 minutos, (a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros dos minutos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno haya llegado en los primeros dos minutos?

7. Considere el proceso de Cox $M(t) = N(\Theta t)$ donde N es un proceso de Poisson de intensidad $\lambda = 1$ y suponga que el parámetro Θ tiene densidad exponencial $f(\theta) = e^{-\theta}$.

   (a) Demuestre que

   $$P(M(t) = j) = \Big(\frac{t}{1+t}\Big)^j \Big(\frac{1}{1+t}\Big), \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots$$

   (b) Demuestre que

   $$P(M(t) = j, M(t+s) = j+k) = \binom{j+k}{j} t^j s^k \Big(\frac{1}{1+s+t}\Big)^{j+k+1}$$

   de modo que $M(t)$ y $M(s+t) - M(t)$ no son variables independientes.

8. Se corta una pieza de material fibroso obteniéndose una sección circular perpendicular al eje principal. Las fibras se distribuyen sobre el área circular según un proceso de Poisson de tasa 100 fibras por sección. Se determinan las ubicaciones de las fibras y se calcula la distancia de cada fibra al centro de la sección. ¿Cuál es la densidad de probabilidad de esta distancia radial R para una fibra seleccionada al azar?

9. Sea $N(t)$ un proceso de Poisson de parámetro λ. Calcule $\mathrm{E}[N(t)N(t+s)]$.

10. Suponga que los árboles en un bosque de pinos se distribuyen de acuerdo a un proceso de Poisson en el plano con intensidad $\lambda = 100$ por hectárea (Ha). a) ¿Cuál es la probabilidad de que una región de 0.4 Ha haya menos de 20 pinos? b) Suponga que seleccionamos un punto al azar en el bosque y construimos un círculo de radio 50 m. alrededor de este punto. Sea X el número de árboles dentro del círculo. Halle la función de probabilidad de la variable X y determine cuál es su valor esperado. c) Considere un pino seleccionado al azar en el bosque y llame Y la distancia de éste al pino más cercano. Halle la distribución de Y.

11. En una calle con circulación en ambos sentidos los carros pasan en dirección norte con una frecuencia de 10 por minuto y con dirección sur con frecuencia de 16 carros por minuto. a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un intervalo de 15 segundos no pase ningún carro? b) ¿Cuál es la probabilidad de que en 30 segundos pasen al menos 4 carros en dirección norte y a lo sumo 6 en dirección sur? c) Si durante un minuto han pasado un total de 20 carros en ambas direcciones ¿cuál es la probabilidad de que 12 de ellos hayan ido en dirección sur? d) ¿Cuál es la probabilidad de pase primero un carro en dirección norte que en dirección sur?

12. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad dada por la siguiente función

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5t & \text{para } 10 < t \leq 12, \\ 10 & \text{para } 12 < t \leq 18, \\ -5t & \text{para } 18 < t \leq 20. \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el promedio de clientes que visita la tienda en un día? b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 8 clientes lleguen a la tienda entre las 18 y las 19:30? c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo tres clientes entren a la tienda entre 11:30 y 12:30? d) Halle la probabilidad de que cinco clientes entren entre 11 y 12 y otros cinco entren entre 12 y 13.

13. Considere un proceso de Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) = e^{-t}$ para $t > 0$. a) Halle la distribución para el tiempo de espera hasta el primer evento. c) Halle el valor esperado para la variable del inciso anterior. c) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ningún evento entre $t = 0.5$ y $t = 1$?

14. Considere dos procesos de Poisson homogéneos e independientes N y M, con intensidades respectivas λ y μ. Para $n \geq 1$ halle la distribución del número de eventos que ocurren en el proceso N antes de que ocurran n eventos en el proceso M.