Modelos Estocásticos I

Lista de Problemas 12

Los problemas 1 y 2 son para entregar en hojas separadas el lunes 31/10/16

1. Considere dos cadenas de Markov con matrices de transición

$$i)\ P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad ii)\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Demuestre en cada caso que la cadena es irreducible.

   b) Halle el período.

   c) Halle la distribución estacionaria.

   d) Describa el comportamiento asintótico de las potencias de la matriz $P_i, i = 1, 2$.

2. Considere una cadena de Markov sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$P_{ii+1} = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{i+2}\big) \quad \text{para } i \geq 0, \quad P_{ii-1} = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{i+2}\big) \quad \text{para } i \geq 1,$$

   y $P_{00} = 1 - P_{01} = 3/4$. Determine si la cadena es transitoria, recurrente nula o recurrente positiva. En este último caso, halle la distribución estacionaria.

3. Considere dos cadenas de Markov con matrices de transición

$$i)\ P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \qquad ii)\ P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   a) Halle la distribución estacionaria concentrada en cada uno de los conjuntos cerrados irreducibles.

   b) Halle $\lim_{n\to\infty} G_n(i,j)/n$.

4. Considere una cadena de Markov sobre $\{1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$P_{ii+1} = \frac{i}{2i+2} \quad \text{para } i \geq 1, \quad P_{ii-1} = \frac{1}{2} \quad \text{para } i \geq 2, \quad P_{ii} = \frac{1}{2i+2} \quad \text{para } i \geq 2,$$

   y $P_{11} = 1 - P_{12} = 3/4$. Demuestre que no tiene distribución estacionaria.

5. Una persona tiene tres paraguas, algunos en su oficina y otros en su casa. Si al salir de su casa en la mañana, o del trabajo en la noche, está lloviendo, toma un paraguas, si hay uno disponible. Si no hay, se moja. Suponga que, independientemente del pasado, la probabilidad de que llueva en cada viaje es de 0.2. Sea X_n el número de paraguas en el sitio en cual se encuentra en ese instante. a) Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov. b) Calcule la fracción del tiempo que la persona se moja (asintóticamente).

6. A fin de mes, una tienda clasifica las cuentas de sus clientes según estén al día (estado 0), tengan entre 30 y 60 días de atraso (1), tengan entre 60 y 90 días de atraso (2) y tengan mas de 90 días de atraso (3). Por experiencia previa saben que las cuentas se mueven de un estado a otro según una cadena de Markov con matriz de transición P_5.

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

   A largo plazo, ¿qué fracción de la cuentas está en cada categoría?

7. Tenemos dos cajas y $2N$ bolas de las cuales N son rojas y N negras. Comenzamos con N bolas en cada caja y en cada paso escogemos una bola al azar de cada caja y las intercambiamos. Si X_0 es el número de bolas rojas en la caja de la izquierda al comienzo y X_n, $n \geq 1$ es el número de bolas rojas en la caja de la izquierda al final del n-ésimo paso, halle la matriz de transición y la distribución estacionaria.

8. Considere los números $1, 2, \ldots, 12$ escritos en una circunferencia, como si fuera un reloj. Considere una cadena de Markov que en cada punto salta a cualquiera de los estados adyacentes con igual probabilidad. a)¿Cuál es el valor esperado del número de pasos necesarios para regresar a la posición inicial? b) ¿Cuál es la probabilidad de que X_n visite todos los otros estados antes de regresar al estado inicial?

9. Calcular el periodo de las siguientes cadenas

   a) Cadena de Ehrenfest.

   b) Caminata aleatoria simple.

   c) Cadena de nacimiento y muerte, con algún $r_i > 0$.

10. **El inverso de la cadena de Rachas.** Sea $\{X_n, n \geq 0\}$, una cadena de Markov que toma valores en $\{0, 1, 2, \ldots\}$ con matriz de transición $P_{i,i-1} = 1, \quad \forall i \geq 1$, y $P_{0,i} = p_i > 0, \quad \forall i \geq 0$, con $\{p_i, i \geq 0\}$ una sucesión de reales estrictamente positivos tales que $\sum_{i \geq 0} p_i = 1$.

    a) Hacer un dibujo esbozando una trayectoria de la cadena de rachas (vista en clase) y otro esbozando esta cadena. ¿Que observa?

    b) Muestre que esta cadena es irreducible y recurrente. (Ayuda: Calcule $P_0(T_0 < \infty)$.)

    c) Muestre que esta cadena es positivo recurrente si y solamente si $\sum_{n \geq 1} np_n < \infty$. (Ayuda: Calcule $\mathrm{E}_0(T_0)$.)

    d) Calcular el vector de probabilidad invariante π resolviendo el sistema $\pi P = \pi$, bajo la hipótesis de que la cadena es positivo recurrente. Calcule $\mathrm{E}_y(T_y)$, para todo $y \geq 1$.

    e) Estudie el comportamiento asintótico de las potencias de la matriz de transición.

11. Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a.i.i.d. que toman valores en $\mathbb{Z}$ y sea $P(\xi_1 = i) = p(i), i \in \mathbb{Z}$. Sea $A \subset \mathbb{Z}$ tal que $P(\xi_1 \in A) > 0$ y sea $T_A = \min\{n \geq 1 : \xi_n \in A\}$. Demuestre que $P(\xi_{T_A} = i) = p(i) / \sum_{a \in A} p(a), i \in A$.

12. Demuestre que para una cadena de Markov irreducible con n estados es posible ir de cualquier estado i a cualquier otro estado j en $n - 1$ pasos o menos.

13. Construimos una cadena de Markov de la siguiente manera: Si estamos en el estado $k, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, lanzamos un dado k veces, vemos al mayor valor obtenido y la cadena se mueve a ese estado. (a) Halle las probabilidades de transición y escriba la matriz de transición correspondiente. (b) ¿Es aperiódica esta cadena?. (c) ¿Tiene una única distribución estacionaria? (d) ¿Puedes hallar el estado más visitado en promedio?

14. Sea X_n una cadena de Markov irreducible y aperiódica con matriz de transición P y sea π su distribución estacionaria. Suponga que la distribución inicial de la cadena es π: $P(X_0 = i) = \pi(i)$ para todo $i \in \mathcal{E}$. (a) Fijamos N y sea $X_0^* = X_N, X_1^* = X_{N-1}, \ldots$. Demuestre que este es un proceso de Markov. (b) Sea P^* la matriz de transición de X_j^*. Halle las entradas P_{ij}^*. (c) Demuestre que P y P^* tienen la misma distribución estacionaria.