Modelos Estocásticos I

Lista de Problemas 10

Los problemas 1 y 2 son para entregar en hojas separadas el lunes 17/10/16

1. Considere un paseo al azar simple y simétrico: $P_{ii+1} = P_{ii-1} = 1/2$ para $0 < i < N$, con estados absorbentes en los extremos: $P_{00} = P_{NN} = 1$. Sea $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ ó } X_n = N\}$, el instante en el cual la cadena entra a un estado absorbente. Calcule $\mathrm{E}_i(T)$, el valor esperado del intervalo de tiempo hasta que la cadena es absorbida si comienza de i. Calcule este valor esperado en los siguientes casos particulares: $N = 25,\ i = 15$; $N = 50,\ i = 30$; $N = 250,\ i = 150$; $N = 2500,\ i = 1500$. Obtenga una ecuación para $\mathrm{E}_i(T)$ en el caso asimétrico $P_{ii+1} = p$, $P_{ii-1} = q$, $p + q = 1$, y compruebe que la siguiente función es solución de esta ecuación:
$$\frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p}\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}.$$

2. En cada etapa de un multiplicador de electrones, cada electrón, al pegar en la placa, genera un número de electrones con distribución de Poisson de media λ. Determine la media y la varianza del número de electrones en la n-ésima etapa. Si $\lambda = 1.1$ calcule la probabilidad de extinción $u_n = P(X_n = 0|X_0 = 1)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. ¿Cuánto vale la probabilidad de extinción final u_∞?

3. Suponga que $p_k = P(\xi = k) = ap^{k-1}$, para $k = 1, 2, 3, \dots$ donde $0 < p < 1$, $0 < a < (1-p)$ y $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^\infty p_k = 1 - \frac{a}{1-p} = \frac{1-(p+a)}{1-p}$. a) Halle la f. g. p. correspondiente $\phi(s)$ y calcule la media μ de la distribución. b) Demuestre que la ecuación $\phi(u) = u$ tiene como raíces positivas 1 y $u = \frac{1-(p+a)}{p(1-p)}$. c) Demuestre que $u_\infty = 1$ si y sólo si $\mu \le 1$.

4. Un jugador dispone de un capital de 2 pesos y necesita incrementarlo a 10. Puede jugar un juego con las siguientes reglas: se lanza una moneda balanceada, si el jugador apuesta correctamente ganará una suma igual a la suma apostada; si no, pierde el dinero apostado. El jugador decide usar la siguiente estrategia: a cada paso decide apostar todo su dinero si tiene 5 pesos o menos; en otro caso sólo apuesta lo necesario para incrementar su capital a 10 pesos, en caso de ganar. Sea $X = \{X_n, n \inf \mathbb{N}\}$, el proceso que denota el capital del jugador después de n lanzamientos. (a) Justificar que el proceso es una cadena de Markov, determinar su espacio de estados y su matriz de transición. (b) Pruebe que la probabilidad de que el jugador logre juntar 10 pesos es 1/5. (c) ¿Cuál es el tiempo esperado de la duración del juego? o dicho de otro modo ¿Cuál es el número esperado de lanzamientos necesarios para que el jugador logre alcanzar su objetivo o perder todo su capital? Indicación: se puede usar R, o Matlab en el cálculo de la solución.

5. Sea $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ un paseo al azar simétrico ($P(\xi_j = 1) = 1/2 = P(\xi = -1)$) que comienza en 0: $S_0 = 0$. Sea $M_n = \max_{0\le j\le n} S_j$ y N un entero positivo. Demuestre que
$$P(M_n \ge N) = 2P(S_n \ge N) - P(S_n = N)$$
$$P(M_n = N) = P(S_n = N) + P(S_n = N+1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{[\frac{n-N}{2}]}$$

6. Usando el resultado anterior demostrar que
$$P(S_j \ne 0, 1 \le j \le n+1) = P(M_n \le 0) = P(S_n = 0) + P(S_n = 1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{[n/2]}$$
$$P(S_1S_2\cdots S_n \ne 0, S_{n+1} = 0) = P(M_{n-1} \le 0, S_n > 0)$$

7. Usando el Teorema Central de Límite de DeMoivre-Laplace demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \le x) = 2\Phi(x) - 1$ donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de una variable normal de media cero y varianza 1.

8. Sea $T_k = \min\{n \ge 1 : S_n = k\}$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(\frac{T_n}{n^2} \le x) = 2(1 - \Phi(1/\sqrt{x}))$, para $x > 0$. Ayuda: Use el resultado del ejercicio 21

9. Demuestre que para un paseo al azar simétrico la probabilidad de que en el período $[0, 2n]$ la última visita al origen ocurra en el instante $2k$ es
$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

10. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $n \ge 1$ un paseo al azar simple con $P(\xi = 1) = p = 1 - P(\xi_i = -1)$, con $p \le 1/2$. Demuestre que para cualquier entero k
$$P\Big(\cup_{n\ge1}\{S_n \ge k\}\Big) = \Big[P\Big(\cup_{n\ge1}\{S_n \ge 1\}\Big)\Big]^k$$
Ayuda: Dado que el paseo llega al nivel 1, considere un nuevo paseo que inicia en ese momento y explore la probabilidad de que el paseo llegue a un nivel que sea una unidad mayor que su nivel de inicio.

11. En las condiciones del ejercicio anterior, halle una ecuación cuadrática para $y = P\big(\cup_{n\geq 1}\{S_n \geq 1\}\big)$ haciendo un análisis de la primera transición. Para $p < 1/2$ demuestre que las raíces de esta ecuación son $p/(1-p)$ y 1. Dé un argumento para desechar la solución 1 y por lo tanto la probabilidad debe valer $p/(1-p)$. Para $p = 1/2$ demuestre que la ecuación tiene una raíz doble que vale 1. Para $p < 1/2$ demuestre que $p/(1-p) = \exp(-r^*)$ donde r^* es la única raíz positiva de $g(s) = 1$, donde $g(s) = \mathrm{E}(e^{s\xi})$.

12. Sea $Z = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$ el tamaño total de una familia en un proceso de ramificación en el cual el número de descendientes por individuo tiene media $\mu = \mathrm{E}(\xi) < 1$. Suponiendo que $X_0 = 1$, demuestre que $\mathrm{E}(Z) = 1/(1-\mu)$.

13. En cierta sociedad las familias escogen el número de hijos que van a tener de acuerdo a la siguiente regla: Si el primer hijo es una niña, tienen exactamente un hijo más. Si el primer hijo es un niño, continúan teniendo hijos hasta tener la primera niña y allí se detienen. Sea ξ el número de hijos varones en una familia particular. ¿Cuál es la función generadora de ξ? Determine la media de ξ directamente y diferenciando la función generadora.

14. Sea X_n un proceso de ramificación que inicia con un sólo individuo. Halle la probabilidad de extinción en los siguientes casos: (a) $P(\xi = 0) = 1/2$, $P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = 1/4$. (b) $P(\xi = 0) = P(\xi = 1) = 1/4$, $P(\xi = 2) = 1/2$. En cada caso halle también la probabilidad de extinción si la población inicia con k individuos.

15. En el instante inicial un cultivo de células comienza con una célula de tipo A. Al final de un minuto esta célula muere y da origen a alguna de las siguientes combinaciones con las probabilidades indicadas: 2 células tipo A con probabilidad $1/4$, una célula tipo A y una tipo B con probabilidad $2/3$ y dos células tipo B con probabilidad $1/12$. Las células tipo A viven por 1 minuto y se reproducen como hemos descrito. Las células tipo B mueren al cabo de 1 minuto sin reproducirse y todas las células actúan de manera independiente. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no hayan aparecido células tipo B al cabo de n minutos y medio? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el cultivo de células se extinga en algún momento?

16. Considere un proceso de ramificación con $\phi(s) = as^2 + bs + c$ con $a > 0, b > 0, c > 0$, $\phi(1) = 1$. Halle la probabilidad de extinción y dé una condición para que esta probabilidad valga 1.

17. Considere un proceso de ramificación en el cual la descendencia se genera de acuerdo a una distribución de Bernoulli con función generadora de probabilidad $\phi(s) = q + ps$ y sea $T = \inf\{n : X_n = 0\}$. (a) Halle $P(T = n)$ para $n \geq 1$. (b) Halle $P(T = n)$ si la población inicial tiene k individuos.

18. Considere un proceso de ramificación en el cual la descendencia se genera de acuerdo a una distribución con f.g.p. $\phi(s) = 0.15 + 0.05s + 0.03s^2 + 0.07s^3 + 0.4s^4 + 0.25s^2 + 0.05s^6$ Halle la probabilidad de extinción.

19. Considere un proceso de ramificación y sea X_n el tamaño de la n-ésima generación si $X_0 = 1$. Sea ξ una v.a. con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ que representa el número de descendientes de un individuo con ley dada por $P(\xi = k) = C(2/3)^k$ para $k = 1, 2, \dots$. (a) Determine una condición sobre C para que la probabilidad de extinción sea menor que 1. (b) Halle una fórmula para $\mathrm{E}(X_n)$ en términos de C y n. (c) Suponiendo que C es tal que la probabilidad de extinción es 1, sea N el número total de todos los individuos de la población, sumando todas las generaciones. Demuestre que $E(N)$ satisface $\mathrm{E}(N) = 1 + \mathrm{E}(\xi)\,\mathrm{E}(N)$ y en consecuencia determine $\mathrm{E}(N)$. Haga una gráfica de $\mathrm{E}(N)$ contra C.

20. Considere un proceso de ramificación con $X_0 = 1$ y ley de reproducción dada por $p_0 = 1/10; p_1 = 7/10; p_2 = 2/10$. (a) Halle la probabilidad de extinción. (b) Halle el tamaño promedio para la n-ésima generación. (c) Halle la desviación estándar para el tamaño de la n-ésima generación. (d) Responda las tres preguntas anteriores si $X_0 = m$.

21. Haga un programa en `R` para simular cadenas de Markov finitas que satisfaga las siguientes condiciones:

    - El programa debe poder simular cadenas con espacio de estados de cualquier tamaño finito.
    - El espacio de estados de la cadena es $\{1, 2, \dots, n\}$ con $n \inf \mathbb{N}$.
    - Las entradas del programa son el número de pasos k que se quiere simular, la distribución inicial π y la matriz de transición P.
    - El programa debe verificar que P es una matriz cuadrada y que su dimensión es compatible con la dimensión de π. Debe dar un mensaje de alerta si esto no se cumple.
    - El valor por defecto de la distribución inicial debe ser la distribución uniforme sobre el espacio de estados.
    - La salida es un vector de dimensión k con los estados sucesivos de la trayectoria simulada.

    Pruebe el programa simulando trayectorias de longitud 100 con distribución inicial uniforme y con las matrices de transición P_1, P_2, P_3 y P_4 de la lista de problemas 6. Haga 10 simulaciones para cada matriz de transición. Presente sus resultados en forma gráfica, usando una gráfica para los resultados de cada matriz.