Nombre: ____

1	2	3	4	T

Modelos Estocásticos I

Segundo Examen Parcial

Viernes 14/10/2016.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Responda 3 de las siguientes preguntas.

1. Sea $X_n, n \geq 1$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ y probabilidades de transición estacionarias. Suponga que $X_0 = i$ para algún $i \in \mathcal{E}$ y sea $j \neq i$. Llamemos $N(j)$ al número de visitas de la cadena al estado j. Definimos también el instante de la k-ésima vista al estado j, $T_j^k = \text{mín}\{n > T_j^{k-1} : X_n = j\}$, con la convención $T_j^0 = 0$.

   a) Demuestre que $P_i(T_j^k < \infty) = \rho_{ij}\rho_{jj}^{k-1}$ donde $\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty)$.

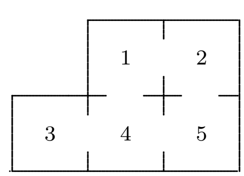
   b) Halle la función probabilidad de $N(j)$, el número de visitas al estado j.

   c) Demuestre que si j es un estado transitorio entonces $P_i(N(j) < \infty) = 1$ y

   $$\mathrm{E}_i[N(j)] = \frac{\rho_{ij}}{1 - \rho_{jj}}.$$

   d) Demuestre que si j es un estado recurrente entonces $P_i(N(j) = \infty) = \rho_{ij}$

2. Un ratón se mueve en un laberinto con cinco compartimientos que se conectan según se muestra en la figura. En cada etapa, el ratón se mueve por los compartimientos al azar, es decir, si hay k salidas posibles de un compartimiento, el ratón escoge entre ellas con probabilidad uniforme $1/k$.



   a) Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov y demuestre que la cadena es irreducible.

b) Si el ratón se coloca inicialmente en el compartimiento 1, halle la probabilidad de que llegue al compartimiento 2 antes que al compartimiento 3.

c) Si el ratón se coloca inicialmente en el compartimiento 1, halle el valor esperado del número de pasos hasta llegar al compartimiento 5 por primera vez.

3. Considere una población en la cual cada individuo tiene una cantidad aleatoria de descendientes ξ con función de probabilidad $P(\xi = k) = p_k > 0, \quad$ para $0 \leq k \leq 2$ y $P(\xi = k) = 0$ para $k > 2$.

   a) Calcule la función generadora de probabilidad $\phi(s)$ de ξ para $s \in [-1, 1]$.

   b) Si la población comienza con un individuo y X_n es el tamaño de la n-ésima generación, demuestre que $X_n, n \geq 0$ es una cadena de Markov y clasifique los estados de esta cadena.

   c) Halle la media y la varianza de X_n en términos de $p_k, 0 \leq k \leq 2$.

   d) ¿Bajo qué condiciones sobre p_0, p_1 y p_2 es segura la extinción? ¿Cuál es la probabilidad de extinción si la extinción no es segura?

   e) Sea $Z = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$ el tamaño total de la población (con $X_0 = 1$) que sigue la ley descrita anteriormente. Bajo la condición para extinción segura, halle el valor esperado de Z.

4. Sea $(\xi_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = 1/2$ para $n \geq 1$, definimos $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ para $n \geq 1$ y $S_0 = 0$. S_n es un paseo al azar simple y simétrico.

   a) Sea $M_n = \text{máx}\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$. ¿Son independientes S_n y M_n? Justfique su respuesta.

   b) Usando un argumento de reflexión de las trayectorias, demuestre que si $b < r$, se tiene que $P(M_n \geq r, S_n = b) = P(S_n = 2r - b)$. ¿Qué ocurre si $b \geq r$?

   c) Deduzca que $P(M_n \geq r) = 2P(S_n \geq r)$ si n y r no tienen la misma paridad.

   d) Halle la función de probabilidad de M_n.

   e) Usando el resultado anterior demuestre que

   $$P(S_1 S_2 \cdots S_{n+1} \neq 0) = P(M_n \leq 0)$$

   y halle el valor de esta probabilidad.