Modelos Estocásticos I

Lista de Problemas 7

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 8/10/14

1. Una cadena de Markov se mueve de la siguiente manera: Si en el instante n está en el estado m, en el siguiente instante su posición se distribuye uniformemente en los estados $0, 1, \ldots, m-1$. Halle el valor esperado del tiempo transcurrido hasta que la cadena llegue a 0 por primera vez si comienza en m.

2. Considere un paseo al azar simple y simétrico: $P_{ii+1} = P_{ii-1} = 1/2$ para $0 < i < N$, con estados absorbentes en los extremos: $P_{00} = P_{NN} = 1$. Sea $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ ó } X_n = N\}$, el instante en el cual la cadena entra a un estado absorbente. Calcule $\mathrm{E}_i(T)$, el valor esperado del intervalo de tiempo hasta que la cadena es absorbida si comienza de i. Calcule este valor esperado en los siguientes casos particulares: $N = 25,\ i = 15$; $N = 50,\ i = 30$; $N = 250,\ i = 150$; $N = 2500,\ i = 1500$. Obtenga una ecuación para $\mathrm{E}_i(T)$ en el caso asimétrico $P_{ii+1} = p$, $P_{ii-1} = q$, $p + q = 1$, y compruebe que la siguiente función es solución de esta ecuación:
$$\frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p}\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}.$$

3. Una cadena de Markov se mueve de la siguiente manera: Si en el instante n está en la posición j, en el instante $n+1$ su posición es 0 con probabilidad $1/j$, y su posición es k con probabilidad $2k/j^2$, para $k = 1, 2, \ldots, j-1$. Halle el valor esperado del tiempo transcurrido hasta que la cadena llegue a 0 por primera vez si comienza en m.

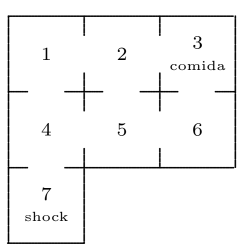
4. Una caja contiene cinco bolas rojas y tres negras. Se seleccionan las bolas al azar, una a una. Si se selecciona una bola roja, se deja fuera de la caja. Si, por el contrario, se selecciona una bola negra, se vuelve a colocar en la caja. Este proceso continua hasta que todas las bolas rojas hayan sido sacadas de la caja. ¿Cuál es la duración promedio del proceso?

5. Sea N el número de veces que hace falta lanzar una moneda al aire hasta obtener Sol dos veces consecutivas. Halle una cadena de Markov que sirva de modelo a esta situación. Usando un análisis de la primera transición, halle el valor esperado del número de lanzamientos necesarios para obtener Sol dos veces consecutivas.

6. Se lanza una moneda repetidamente hasta obtener dos águilas o dos soles. Suponga que el resultado del primer lanzamiento es un águila. Halle la probabilidad de que la serie termine con el lanzamiento de dos soles.

7. Tienes cinco monedas y las lanzas al aire. Las que caen sol se vuelven a lanzar y se continúa así hasta que todas las monedas muestren águila. Sea X el número de monedas en el último lanzamiento. Halle $P(X = 1)$.

8. Se coloca una rata en el compartimiento 4 del laberinto que se muestra en la figura. La rata se mueve por los compartimientos al azar, es decir, si hay k salidas posibles de un compartimiento, la rata escoge entre ellas con probabilidad uniforme $1/k$. ¿Cuál es la probabilidad de que la rata encuentre la comida en el compartimiento 3 antes de sentir el shock eléctrico en el compartimiento 7?



9. Un jugador que juega a la ruleta hace una serie de apuestas de un peso y tiene un capital inicial de \$1.000. Su probabilidad de ganar en cada apuesta es 9/19 y de perder 10/19. El jugador decide dejar de jugar cuando gane un peso (es decir, cuando su capital sea \$1001) o cuando se arruine. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador se arruine? (b) Halle el valor esperado de la pérdida.

10. Considere un paseo al azar simple y simétrico: $P_{ii+1} = P_{ii-1} = 1/2$ para $0 < i < N$, con estados absorbentes en los extremos: $P_{00} = P_{NN} = 1$. Sea $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ ó } X_n = N\}$, el instante en el cual la cadena entra a un estado absorbente. Calcule $\mathrm{E}_i(T)$, el valor esperado del intervalo de tiempo hasta que la cadena es absorbida si comienza de i. Calcule este valor esperado en los siguientes casos particulares: $N = 25,\ i = 15$; $N = 50,\ i = 30$; $N = 250,\ i = 150$; $N = 2500,\ i = 1500$. Obtenga una ecuación para $\mathrm{E}_i(T)$ en el caso asimétrico $P_{ii+1} = p$, $P_{ii-1} = q$, $p + q = 1$, y compruebe que la siguiente función es solución de esta ecuación:

$$\frac{i}{q-p} \frac{N}{q-p} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}.$$

11. Un jugador dispone de un capital de 2 pesos y necesita incrementarlo a 10. Puede jugar un juego con las siguientes reglas: se lanza una moneda balanceada, si el jugador apuesta correctamente ganará una suma igual a la suma apostada; si no, pierde el dinero apostado. El jugador decide usar la siguiente estrategia: a cada paso decide apostar todo su dinero si tiene 5 pesos o menos; en otro caso sólo apuesta lo necesario para incrementar su capital a 10 pesos, en caso de ganar. Sea $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, el proceso que denota el capital del jugador después de n lanzamientos. (a) Justificar que el proceso es una cadena de Markov, determinar su espacio de estados y su matriz de transición. (b) Pruebe que la probabilidad de que el jugador logre juntar 10 pesos es $1/5$. (c) ¿Cuál es el tiempo esperado de la duración del juego? o dicho de otro modo ¿Cuál es el número esperado de lanzamientos necesarios para que el jugador logre alcanzar su objetivo o perder todo su capital? Indicación: se puede usar R, o Matlab en el cálculo de la solución.

12. En cada etapa de un multiplicador de electrones, cada electrón, al pegar en la placa, genera un número de electrones con distribución de Poisson de media λ. Determine la media y la varianza del número de electrones en la n-ésima etapa.

    Si $\lambda = 1.1$ calcule la probabilidad de extinción $u_n = P(X_n = 0|X_0 = 1)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. ¿Cuánto vale la probabilidad de extinción final u_∞?

13. Suponga que $p_k = P(\xi = k) = ap^{k-1}$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$ donde $0 < p < 1$, $0 < a < (1-p)$ y

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - \frac{a}{1-p} = \frac{1-(p+a)}{1-p}.$$

    a) Halle la f. g. p. correspondiente $\phi(s)$ y calcule la media μ de la distribución.

    b) Demuestre que la ecuación $\phi(u) = u$ tiene como raíces positivas 1 y $u = \frac{1-(p+a)}{p(1-p)}$.

    c) Demuestre que $u_\infty = 1$ si y sólo si $\mu \leq 1$.

14. Sea $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ un paseo al azar simétrico ($P(\xi_j = 1) = 1/2 = P(\xi = -1)$) que comienza en 0: $S_0 = 0$. Sea $M_n = \text{máx}_{0 \leq j \leq n} S_j$ y N un entero positivo. Demuestre que

$$\begin{aligned} P(M_n \geq N) &= 2P(S_n \geq N) - P(S_n = N) \\ P(M_n = N) &= P(S_n = N) + P(S_n = N+1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\left[\frac{n-N}{2}\right]} \end{aligned}$$

15. Usando el resultado anterior demostrar que

$$\begin{aligned} P(S_j \neq 0, 1 \leq j \leq n+1) &= P(M_n \leq 0) \\ &= P(S_n = 0) + P(S_n = 1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{[n/2]} \\ P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0, S_{n+1} = 0) &= P(M_{n-1} \leq 0, S_n > 0) \end{aligned}$$