Modelos Estocásticos I

Lista de Problemas 6

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 1/10/14

Las siguientes matrices de Markov se usan en algunos de los problemas listados a continuación:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_9 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{10} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \quad P_{14} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determine las clases de equivalencia y clasifique los estados de la cadena de Markov con las matrices de transición P_1, P_2, P_3 y P_4.

2. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición P_5.

   (a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 3. (b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

3. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y matriz de transición P_6

   a) Determine las clases de equivalencia. ¿Cuáles son cerradas?

   b) Determine cuáles estados son transitorios y cuáles recurrentes.

   c) Halle ρ_{0j} para $j = 0, 1, \dots, 6$.

4. Lanzamos un dado repetidamente y sea $\xi_n, n \geq 1$ la sucesión de resultados. Determine cuáles de los siguientes procesos X_n construidos a partir de la sucesión ξ_n son cadenas de Markov. Para las que son, halle las matrices de transición y halle también $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$.

   a) El mayor número hasta el instante n.

   b) El número de lanzamientos hasta el próximo 6 después del instante n.

   c) El número de veces que se ha salido el 6 hasta el instante n.

5. Considere una cadena de Markov sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ tal que a partir del estado i, la cadena va a $i+1$ con probabilidad p, $0 < p < 1$, y va al estado 0 con probabilidad $1 - p$.

   a) Demuestre que esta cadena es irreducible.

   b) Calcule $P_0(T_0 = n)$, $n \geq 1$.

   c) Demuestre que la cadena es recurrente.

6. Un sistema puede estar en cuatro estados, 1, 2, 3 y 4. Si el sistema está en el estado j, $j < 4$, en el siguiente paso se mueve al estado $j+1$. Desde el estado 4, el sistema pasa a 2 o a 3 con probabilidad 1/2 en cada caso. Halle la matriz de transición. Clasifique los estados y calcule la matriz de transición en n pasos para $n = 2$ y $n = 16$.

7. Determine las clases de equivalencia y clasifique los estados en transitorios o recurrentes para una cadena de Markov con las siguientes matrices de transición. Determine también los subconjuntos cerrados e irreducibles del espacio de estados.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d) \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Sean $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con valores en $\{0,1,2,3,4\}$ con distribución común $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$. Sea $X_0 = 0$ y definimos

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} \quad \text{(módulo 5)}.$$

Demuestre que X_n es una cadena de Markov. Halle su espacio de estados y su matriz de transición. Observe que en esta matriz cada columna suma 1. Este tipo de matrices se conoce como *doblemente aleatorias*. *Observación:* Para $x, y \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la suma módulo n se define como

$$x + y \text{ (módulo } n) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x + y < n, \\ x + y - n & \text{si } x + y \geq n \end{cases}$$

9. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición P_7. (a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 2. (b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

10. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ y probabilidad de transición P_8: Si comienza en el estado 1, halle la probabilidad de que el proceso termine en el estado 0. Compare esta probabilidad con la entrada $(1, 0)$ en las matrices $P_8^2,\ P_8^4,\ P_8^8,\ P_8^{16},\ P_8^{32},\ P_8^{64}$.

11. Halle el tiempo promedio para llegar al estado 3 para una cadena de Markov con matriz de transición P_9. Puede suponer que el estado inicial se escoge entre $\{0, 1, 2\}$ de manera uniforme.

12. Halle el tiempo promedio para llegar al estado 3 partiendo del estado 0 para una cadena de Markov con matriz de transición P_{10}. Puede suponer que el estado inicial se escoge entre $\{0, 1, 2\}$ de manera uniforme.

13. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición P_{11} (a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 3. (b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

14. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición P_{12}. Comenzando en el estado 1, determine el tiempo promedio que el proceso pasa en el estado 1 antes de la absorción y el tiempo promedio que pasa en el estado 2 antes de la absorción. Verifique que la suma de estas cantidades es igual al tiempo promedio hasta la absorción.

15. En promedio, ¿qué requiere menos lanzamientos, lanzar una moneda hasta obtener por primera vez el patrón AAS, es decir, hasta observar dos águilas seguidas de un sol, o lanzar una moneda hasta obtener ASA? ¿Puedes explicar por qué son diferentes?

16. Considere una cadena de Markov cuya matriz de transición es P_{13}. Si la cadena comienza en 1, determine la probabilidad de que el proceso nunca visite el estado 2.

17. Una cadena de Markov tiene matriz de transición P_{14} y comienza en el estado 0. Sabemos que el proceso terminará en el estado 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la última transición ocurra desde el estado 1? (Ayuda: Sea $T_2 = \min\{n \geq 0 : X_n = 2\}$ y sea $\eta_i = P(X_{T-1} = 1 | X_0 = i)$ para $i = 0, 1$ Haciendo un razonamiento con la primera transición halle ecuaciones para η_0, η_1 y resuélvalas).