# Modelos Estocásticos I

**Lista de Problemas 10**

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 29/10/14

Las siguientes matrices de Markov se usan en algunos de los problemas listados a continuación:

$$P_1 = \begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 \\ .2 & .4 & .4 \\ 0 & .3 & .7 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} .7 & .3 & 0 & 0 \\ 0 & .4 & .6 & 0 \\ .2 & 0 & .5 & .3 \\ .6 & 0 & 0 & .4 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad P_8 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad P_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Halle la distribución estacionaria para una cadena de Markov con matriz de transición $P_2$. Verifique que la distribución que halló satisface la condición $\pi' P_2 = \pi$.
2. Una partícula se mueve de acuerdo a una cadena de Markov sobre $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, c + d\}$. Si está en cualquiera de los primeros $c$ estados, la partícula salta en un paso a un estado que se selecciona uniformemente entre los últimos $d$ estados. Si, en cambio, se encuentra en cualquiera de los últimos $d$ estados, pasa en una transición a alguno de los primeros $c$ estados, seleccionado de manera uniforme. Halle la distribución estacionaria.
3. Sea $\pi$ la distribución estacionaria de una cadena de Markov. a) Demuestre que si $\pi(i) > 0$ y $i \to j$ entonces $\pi(j) > 0$ también.

   b) Demuestre que si $j$ y $k$ son dos estados de una cadena de Markov para los cuales se cumple que $P_{ij} = cP_{ik}$ para todo $i \inf \mathcal{S}$, entonces $\pi(j) = c\pi(k)$.
4. Halle la distribución estacionaria para una cadena de Markov con matriz de transición $P_1$. Verifique que la distribución que halló satisface la condición $\pi P_1 = \pi$.
5. Halle la distribución estacionaria para las cadenas de Markov con matriz de transición $P_3$. Verifique que la distribución que halló satisface la condición $\pi P_3 = \pi$.
6. Halle la distribución estacionaria para las cadenas de Markov con matriz de transición $P_4$. Verifique que la distribución que halló satisface la condición $\pi P_4 = \pi$.
7. Considere una cadena de Markov con matriz de transición $P_5$ Demuestre que esta cadena tiene infinitas distribuciones estacionarias.
8. Considere una cadena de Markov con matriz de transición $P_6$ Demuestre que esta cadena tiene infinitas distribuciones estacionarias.
9. Considere una cadena de Markov con matriz de transición $P_7$ Demuestre que esta cadena tiene infinitas distribuciones estacionarias.
10. Considere una cadena de Markov con función de transición $P$ que satisface $P_{ij} = \alpha_j$ para todo $i, j \inf \mathcal{S}$, donde las $\alpha_j$ son constantes. Demuestre que la cadena tiene una única distribución estacionaria $\pi$ dada por $\pi(j) = \alpha_j$, $j \inf \mathcal{S}$.
11. Halle la distribución estacionaria para una cadena de Ehrenfest.

12. Considere una cadena de Markov con probabilidades de transición dadas por

$$P_{i0} = \frac{i+1}{i+2}, \quad P_{ii+1} = \frac{1}{i+2},$$

¿Es recurrente positiva esta cadena? Si lo es, halle su distribución asintótica.

¿Qué sucede para la cadena con probabilidades de transición

$$P_{i0} = \frac{1}{i+2}, \quad P_{ii+1} = \frac{i+1}{i+2} \ ?$$

13. Sean $\pi_0$ y $\pi_1$ dos distribuciones estacionarias distintas para una cadena de Markov. Demuestre que para $0 \leq \alpha \leq 1$, la función $\pi_\alpha$ definida por

$$\pi_\alpha(i) = (1-\alpha)\pi_0(i) + \alpha\pi_1(i), \quad i \inf \mathcal{S},$$

es una distribución estacionaria y que distintos valores de $\alpha$ producen distintas distribuciones estacionarias.

14. Considere una cadena de Markov con probabilidades de transición

$$P_{ii+1} = p, \quad P_{i0} = 1-p,$$

para $i \geq 0$. Halle la distribución estacionaria.

15. Suponga que la matriz de transición $P$ es doblemente estocástica:

$$\sum_i P_{ij} = \sum_j P_{ij} = 1.$$

Demuestre que si la cadena es infinita e irreducible entonces no puede ser recurrente positiva.

16. Considere un paseo al azar simple con una barrera parcialmente reflejante en 0: Si $X_n = i$ entonces $X_{n+1}$ puede valer $i+1$ ó $i-1$ con probabilidades respectivas $p$ y $q$ $(p+q=1)$, y si $X_n = 0$ entonces $X_{n+1}$ puede valer 1 ó 0 con probabilidades respectivas $p$ y $q$. ¿Bajo que condiciones existe una distribución estacionaria para esta cadena de Markov?

17. Un sistema de producción tiene tres estados posibles: 1, 2, y 3: En el estado 1 opera de manera eficiente. En el estado 2 continua funcionando pero su eficiencia es menor. El estado 3 requiere que el proceso se detenga y se haga mantenimiento o se repare la maquinaria. Si $X_n$ denote el estado del sistema en el instante $n$, entonces suponemos que $X_0, X_1, \dots$ es una cadena de Markov matriz de transición $P_8$. (a) Halle la distribución estacionaria para este proceso. (b) La ganancia que el proceso genera por unidad de tiempo en cada estados es, respectivamente, \$1,000; \$ 600 y \$ -200. Halle la ganancia media por unidad de tiempo a largo plazo.

18. Una cadena de Markov tiene espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición $P_9$ (1) Clasifique los estados de la cadena. (2) Verifique que esta cadena es irreducible con periodo 3. (3) Determine la distribución estacionaria.

19. Considere dos cajas y $2N$ bolas de las cuales la mitad son negras y la otra mitad blancas. Inicialmente se colocan $N$ bolas en cada caja, al azar. En cada paso se selecciona una bola de cada caja al azar y se intercambian. Sea $X_n$ el número de bolas blancas en la primera caja en el instante $n$. Halle la matriz de transición para esta cadena y halle su distribución estacionaria.

20. Sea $P$ una matriz de Markov y $\mathcal{E}$ un espacio de estados finito. Demuestre que $\pi$ es una distribución invariante para $P$ si y sólo si $\pi(I - P + A) = \mathbf{1}$, donde $A = (a_{ij}, i, j \inf \mathcal{E})$ con $a_{ij} = 1$ para todo $i, j$, y $\mathbf{1}$ es un vector con todas sus componentes iguales a 1 y longitud igual al número de elementos de $\mathcal{E}$. Deduzca que si $P$ es irreducible entonces $I - P + A$ es invertible.