Modelos Estocásticos I

Hoja de Problemas 1

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 20/08/14

1. Considere el siguiente experimento en dos etapas: primero escogemos un punto X con distribución uniforme en $(0,1)$; después escogemos un punto Y con distribución uniforme en $(-X,X)$. El vector aleatorio (X,Y) representa el resultado del experimento. ¿Cuál es su densidad conjunta? ¿Cuál es la densidad marginal de Y? ¿Cuál es la densidad condicional de X dada Y?

2. Definimos la varianza condicional de X dada Y por

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mathrm{E}(X^2|Y) - [\mathrm{E}(X|Y)]^2$$

   Sean $X,\ Y$ variables aleatorias con segundo momento finito. (a) Demuestre que

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y|X))$$

   (b) Sea Z otra v.a. Demuestre la siguiente fórmula

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[\mathrm{Cov}((X,Y|Z))] + \mathrm{Cov}(\mathrm{E}(X|Z),\mathrm{E}(Y|Z)),$$

   donde definimos $\mathrm{Cov}((X,Y)|Z) = \mathrm{E}(XY|Z) - \mathrm{E}(X|Z)\,\mathrm{E}(Y|Z)$.

3. Si X tiene densidad $f(x) = e^{-|x|/2}, x \in \mathbb{R}$, ¿Cuál es la distribución de $Y = |X|$?

4. Escogemos cinco puntos al azar de manera independiente en el intervalo $[0,1]$. Sea X el número de puntos que pertenecen al intervalo $[0,c]$, donde $0 < c < 1$ es un número fijo. ¿Cuál es la distribución de X?

5. Una caja tiene tres bolas numeradas 1, 2 y 3. Sacamos dos bolas al azar, sucesivamente y sin reposición. Sea X el número en la primera e Y el número en la segunda. (a) Describa la distribución conjunta de X e Y. (b) Calcule $P(X < Y)$. (c) Determine las distribuciones marginales de las variables X e Y. ¿Son independientes?

6. Seleccionamos al azar un punto en el círculo unitario $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y sean (X,Y) las coordenadas del punto seleccionado. (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de (X,Y)? (b) Determine $P(X < Y),\ P(X > Y),\ P(X = Y)$.

7. Seleccionamos al azar un punto en el cuadrado unitario $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Sean (X,Y) las coordenadas del punto seleccionado. (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de (X,Y)? (b) Calcule $P(|(Y/X) - 1| \leq 1/2)$. (c) Calcule $P(Y \geq X | Y \geq 1/2)$.

8. Sean X,Y variables aleatorias con función de distribución conjunta $F(x,y) = (1-e^{-x})(1-e^{-y})$ para $x,y \geq 0$ y $F(x,y) = 0$ en cualquier otro caso. Halle la densidad conjunta y las densidades marginales. ¿Son X e Y independientes?

9. Sea X,Y,Z variables aleatorias independientes cada una con distribución uniforme en $[0,1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $Xt^2 + Yt + Z = 0$ tenga soluciones reales?

10. Sean $X \sim \mathcal{U}[0,a],\ Y \sim \mathcal{U}[a,a+b]$, donde $a,b > 0$ variables aleatorias independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres segmentos $[0,X],\ [X,Y],\ [Y,a+b]$ puedan formar un triángulo?

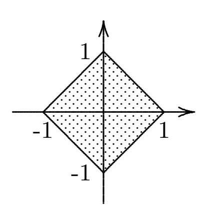
11. Seleccionamos al azar (es decir, con distribución uniforme) un punto en la siguiente región

   Sean X e Y las coordenadas del punto.

   (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?

   (b) Obtenga la densidad marginal de X.

   (c) ¿Son X e Y independientes?



12. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i. con distribución exponencial de parámetros respectivos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. (a) Demuestre que la distribución de $Y = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ también es exponencial ¿Cuál es su parámetro? (b) Demuestre que para $k = 1, \ldots, n$

$$P(X_k = \min_{1\leq i\leq n} X_i) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}.$$

(*Sugerencia:* X_k e Y son independientes y tienen distribución exponencial. Considere el evento $\{X_k < \min_{i\neq k} X_i\}$).

13. Sea X una variable cuya función de distribución F es continua en la recta. Demuestre que la distribución de $Y = F(X)$ es $\mathcal{U}[0,1]$.

14. Sea A el triángulo de vértices $(0,0); (1,0); (0,1)$ y suponga que X, Y tienen densidad conjunta $f(x,y) = C\mathbf{1}_A(x,y)$. (a) Determine el valor de la constante C. (b) Halle las distribuciones marginales de X e Y y la de $Z = X + Y$. (c) ¿Son X e Y independientes? ¿Por qué?

15. Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que $U = (X + Y)/\sqrt{2}$ y $V = (X - Y)/\sqrt{2}$ también son independientes y tienen distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

16. Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{U}(0,1)$. Halle la densidad conjunta de W y Z, donde $W = X + Y$ y $Z = X - Y$. ¿Son estas variables independientes?

17. Sea X una v.a. $\mathcal{N}(0,1)$. Calcule la densidad de $Y = X^4$ y la de $Z = 1/X$. ¿Tienen densidad conjunta Y y Z? ¿Por qué?

18. Sean X, Y v. a. i. tales que $X \sim Bin(m,p)$ e $Y \sim Bin(n,p)$. Obtenga la distribución condicional de X dada $X + Y$. ¿Cómo se llama esta distribución?

19. Se observan dos focos durante su vida útil. Suponga que sus tiempos de vida son independientes y exponenciales de parámetro λ. Sea X el tiempo de vida del primer foco en apagarse e Y el tiempo de vida del otro foco. (a) ¿Cuál es la distribución condicional de X dada Y? ¿Cuál es la distribución de Y dada X?

20. Suponga que (X, Y) tiene distribución uniforme en A, donde A es una región del plano de área positiva y finita. Demuestre que la distribución condicional de X dado que $Y = y$ es uniforme en A_y, la sección de A en y, que definimos $A_y = \{x : (x,y) \in A\}$.

21. Demuestre que si $P(X \in B | Y = y) = P(X \in B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e $y \in \mathbb{R}$, entonces X e Y son independientes.

22. Sea X una v.a. con densidad $f(x)$, f continua. ¿Cuál es la distribución condicional de X dada $|X|$?

23. Sean X, Y el mínimo y el máximo, respectivamente de dos variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{E}xp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Demuestre que $(Y - X)|X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$.

24. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. con distribución continua F. Sea $X = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. (a) Demuestre que para todo $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$P(X_k \leq x | X = t) = \begin{cases} \frac{(n-1)F(x)}{nF(t)}, & \text{si } x < t, \\ 1, & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

(*Sugerencia:* $x^n - y^n = (x-y)(X^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$). (b) Suponga que F es diferenciable. ¿Existe la densidad condicional para la distribución anterior?

25. Sean $X,\ Y$ v.a. tales que $\mathrm{E}(X^2) < \infty$, $\mathrm{E}(Y^2) < \infty$. Demuestre que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, \mathrm{E}(Y|X))$.

26. Suponga que $X,\ Y$ tienen densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Halle la distribución condicional de Y dada X. Calcule $\mathrm{E}(Y|X)$. (b) ¿Son $X,\ Y$ independientes? ¿Por qué? (c) Demuestre que estas variables no están correlacionadas.

27. Sean X, Y v.a.i. con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. ¿Cuál es la distribución condicional de (X,Y) dada $\sqrt{X^2 + Y^2}$, la distancia de (X,Y) all origen?