Nombre: ____

1	2	3	T

Modelos Estocásticos I

Primer Examen Parcial

Viernes 19/9/14, 3 – 6 p.m.

1. Suponga que X, Y tienen densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Halle la distribución condicional de Y dada X. Calcule $\mathrm{E}(Y|X)$.

   (b) ¿Son X, Y independientes? ¿Por qué?

   (c) Demuestre que estas variables no están correlacionadas.

2. Suponga que X, Y son variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetros α y β, respectivamente.

   a) Usando funciones generadoras de probabilidad halle la distribución de $X + Y$.

   b) Halle la distribución condicional de X dado que $X + Y = n$ y explique su resultado en palabras. Halle $\mathrm{E}(X|X + Y)$.

3. Cinco bolas blancas y cinco negras se distribuyen en dos cajas de modo que cada caja contiene cinco bolas. En cada paso sacamos al azar una bola de cada caja y las intercambiamos. Sea X_n el número de bolas blancas en la caja de la izquierda en el paso n.

   a) Explique por qué $\{X_n, n \geq 0\}$ es una cadena de Markov y obtenga su matriz de transición.

   b) Halle $P(X_2 = 3, X_1 = 2|X_0 = 2)$; $P(X_1 = 2|X_2 = 3, X_0 = 2)$.

   c) Si la distribución inicial π asigna igual probabilidad a todos los estados posibles, halle $P(X_1 = 3)$.