Modelos Estocásticos I

Respuestas a los problemas de la tarea 1

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \Omega\}$, y sean $U, V, W y Z$ funciones definidas en Ω por

$$U(\omega) = 3\omega + 2, \qquad V(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \leq 3 \\ 1 & \text{si } \omega > 3 \end{cases} \qquad W(\omega) = \omega^2, \qquad Z(\omega) = \text{sen}(\omega\pi).$$

a) Determine cuáles de estas funciones son variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

b) Para las que sean variables aleatorias, halle la función de probabilidad y la función de distribución asociadas, suponiendo que todos los puntos de Ω son igualmente probables.

c) Para las que no sean variables aleatorias, determine cuál es la σ-álgebra generada por la función correspondiente y en este caso determine la función de probabilidad y la función de distribución asociadas.

Solución.

a) Para la función U, observar que

$$U^{-1}((-\infty, 5]) = \{1\} \notin \mathcal{F},$$

por lo tanto no es una función medible y en consecuencia no es una variable aleatoria.

Para la función V, sea $x \in \mathbb{R}$, consideremos el Boreliano $(-\infty, x]$. Si $x < 0$, tenemos que

$$V^{-1}((-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{F},$$

si $0 \leq x < 1$,

$$V^{-1}((-\infty, x]) = \{1,2,3\} \in \mathcal{F}$$

y si $x \geq 1$,

$$V^{-1}((-\infty, x]) = \Omega \in \mathcal{F}.$$

Por lo tanto V es una variable aleatoria.

Para la función W, observar que

$$W^{-1}((-\infty, 1]) = \{1\} \notin \mathcal{F},$$

por lo tanto no es una función medible y en consecuencia no es una variable aleatoria.

Para la función Z, notemos que $Z(w) = 0$ para toda $w \in \Omega$. Nuevamente, consideremos el Boreliano $(-\infty, x]$. Si $x < 0$,

$$Z^{-1}((-\infty, x]) = \emptyset \in \mathcal{F},$$

si $x \geq 0$,

$$Z^{-1}((-\infty, x]) = \Omega \in \mathcal{F}$$

Por lo tanto Z es una variable aleatoria.

b) Para la variable aleatoria V, tenemos que

$$P_V(0) = P(V^{-1}(0)) = P(\{1,2,3\}) = \frac{3}{6},$$

ya que los puntos de Ω son igualmente probables. Análogamente,

$$P_V(1) = P(V^{-1}(1)) = P(\{4,5,6\}) = \frac{3}{6}.$$

De esta manera la función de distribución es

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Para la variable aleatoria Z, tenemos que

$$P_Z(0) = P(Z^{-1}(0)) = P(\Omega) = 1.$$

Así, la función de distribución es

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

c) Tanto como para U y como para W, tienen a los conjuntos $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ y $\{6\}$ en sus conjuntos de imágenes inversas, por lo tanto deben estar en la σ-álgebra generada por U y por W, esto implica que $\sigma(U) = \sigma(W) = \mathcal{P}(\Omega)$. En este caso tenemos que la función de probabilidad tanto para U y W, es

$$P(A) = \frac{|A|}{6}, \qquad \text{para } A \in \sigma(U) = \sigma(W),$$

y las funciones de distribución son

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5 \\ 1/6 & \text{si } 5 \leq x < 8 \\ 2/6 & \text{si } 8 \leq x < 11 \\ 3/6 & \text{si } 11 \leq x < 14 \\ 4/6 & \text{si } 14 \leq x < 17 \\ 5/6 & \text{si } 17 \leq x < 20 \\ 1 & \text{si } x \geq 20 \end{cases} \quad \text{y} \quad F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/6 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 2/6 & \text{si } 4 \leq x < 9 \\ 3/6 & \text{si } 9 \leq x < 16 \\ 4/6 & \text{si } 16 \leq x < 25 \\ 5/6 & \text{si } 25 \leq x < 36 \\ 1 & \text{si } x \geq 36 \end{cases}$$

2. Sea F una función de distribución. Demuestre que F tiene, a lo sumo, una cantidad numerable de discontinuidades. Si F es continua demuestre que F es uniformemente continua.

Solución.

a) Denotemos por C al conjunto de discontinuidades de F. Note que $x \in C$ si y sólo si $F(x+) - F(x-) > 0$, donde $F(x+)$ y $F(x-)$ denotan a los límites por derecha e izquierda de F en el punto x respectivamente. Por ende, podemos elegir para cada $x \in C$, un racional $q_x \in (F(x-), F(x+))$. Es fácil ver que el mapeo $x \mapsto q_x$, define una función inyectiva de C en $\mathbb{Q}$, y consecuentemente el conjunto C es numerable.

b) Para verificar la continuidad uniforme de F procedemos como sigue. Sea $\varepsilon > 0$; como $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, podemos garantizar la existencia de un $M > 1$ tal que $|F(x)| < \varepsilon/2$ para $x < -M$ y $|1 - F(x)| < \varepsilon/2$ para $x > M$. Adicionalmente, como F es continua se tiene que F es uniformemente continua en el intervalo compacto $[-M, M]$, y por ende, existe $1 > \delta_M > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| < \varepsilon/2 \quad \text{para } x, y \in [-M-2, M+2] \text{ tales que } |x-y| < \delta_M. \tag{1}$$

A partir de lo anterior mostraremos que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x - y| < \delta_M$, se satisface

$$|F(x) - F(y)| \quad < \quad \varepsilon. \tag{2}$$

Para ello suponga sin pérdida de generalidad que $x > 0$. Note que si $x > M + 1$ entonces $y > M$, ya que $0 < \delta_M < 1$. Por lo tanto, de la construcción de M se sigue que $|1 - F(x)|, |1 - F(y)| < \varepsilon/2$, y consecuentemente

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - 1 + 1 - F(y)| \leq |1 - F(x)| + |1 - F(y)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Por otro lado, si $x < M + 1$ entonces $y < M + 2$ (ya que $\delta_M < 1$), y gracias a (1) se tiene que $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$. Procediendo de manera similar cuando $x < 0$, es posible mostrar que (2) es válida también cuando $x < 0$, lo cual termina la prueba