

# Modelos Estocásticos I

## Problemas 9

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 10/10/12

Las siguientes matrices de Markov se usan en algunos de los problemas listados a continuación:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_9 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{10} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \quad P_{14} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determine las clases de equivalencia y clasifique los estados de la cadena de Markov con las matrices de transición  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ .
- Considere una cadena de Markov con espacio de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$  y matrix de transición  $P_5$ .
  - Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 3.
  - Determine el tiempo medio hasta la absorción.
- Considere una cadena de Markov con espacio de estados  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y matriz de transición  $P_6$ 
  - Determine las clases de equivalencia. ¿Cuáles son cerradas?
  - Determine cuáles estados son transitorios y cuáles recurrentes.
  - Halle  $\rho_{0j}$  para  $j = 0, 1, \dots, 6$ .
- Lanzamos un dado repetidamente y sea  $\xi_n, n \geq 1$  la sucesión de resultados. Determine cuáles de los siguientes procesos  $X_n$  construidos a partir de la sucesión  $\xi_n$  son cadenas de Markov. Para las que son, halle las matrices de transición y halle también  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k)$ .
  - El mayor número hasta el instante  $n$ .
  - El número de lanzamientos hasta el próximo 6 después del instante  $n$ .
  - El número de veces que se ha salido el 6 hasta el instante  $n$ .
- Considere una cadena de Markov sobre  $\{0, 1, 2, \dots\}$  tal que a partir del estado  $i$ , la cadena va a  $i+1$  con probabilidad  $p$ ,  $0 < p < 1$ , y va al estado 0 con probabilidad  $1 - p$ .
  - Demuestre que esta cadena es irreducible.
  - Calcule  $P_0(T_0 = n)$ ,  $n \geq 1$ .
  - Demuestre que la cadena es recurrente.

6. Un sistema puede estar en cuatro estados, 1, 2, 3 y 4. Si el sistema está en el estado  $j$ ,  $j < 4$ , en el siguiente paso se mueve al estado  $j + 1$ . Desde el estado 4, el sistema pasa a 2 o a 3 con probabilidad  $1/2$  en cada caso. Halle la matriz de transición. Clasifique los estados y calcule la matriz de transición en  $n$  pasos para  $n = 2$  y  $n = 16$ .
7. Determine las clases de equivalencia y clasifique los estados en transitorios o recurrentes para una cadena de Markov con las siguientes matrices de transición. Determine también los subconjuntos cerrados e irreducibles del espacio de estados.

$$\begin{array}{cccc}
 a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} &
 b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} &
 c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} &
 d) \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

8. Sean  $Y_1, Y_2, \dots$  v.a.i.i.d. con valores en  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  con distribución común  $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$ . Sea  $X_0 = 0$  y definimos

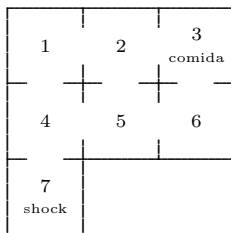
$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} \quad (\text{módulo } 5).$$

Demuestre que  $X_n$  es una cadena de Markov. Halle su espacio de estados y su matriz de transición. Observe que en esta matriz cada columna suma 1. Este tipo de matrices se conoce como *doblemente aleatorias*. *Observación:* Para  $x, y \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , la suma módulo  $n$  se define como

$$x + y \text{ (módulo } n) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x + y < n, \\ x + y - n & \text{si } x + y \geq n \end{cases}$$

9. Considere una cadena de Markov con espacio de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$  y matriz de transición  $P_7$ . (a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 2. (b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.
10. Considere una cadena de Markov con espacio de estados  $\{0, 1, 2, 3\}$  y probabilidad de transición  $P_8$ : Si comienza en el estado 1, halle la probabilidad de que el proceso termine en el estado 0. Compare esta probabilidad con la entrada  $(1, 0)$  en las matrices  $P_8^2, P_8^4, P_8^8, P_8^{16}, P_8^{32}, P_8^{64}$ .
11. Halle el tiempo promedio para llegar al estado 3 para una cadena de Markov con matriz de transición  $P_9$ . Puede suponer que el estado inicial se escoge entre  $\{0, 1, 2\}$  de manera uniforme.
12. Halle el tiempo promedio para llegar al estado 3 partiendo del estado 0 para una cadena de Markov con matriz de transición  $P_4$ . Puede suponer que el estado inicial se escoge entre  $\{0, 1, 2\}$  de manera uniforme.
13. Considere una cadena de Markov con espacio de estados  $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$  y matrix de transición  $P_5$  (a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 3. (b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.
14. Considere una cadena de Markov con espacio de estados  $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$  y matrix de transición  $P_6$ . Comenzando en el estado 1, determine el tiempo promedio que el proceso pasa en el estado 1 antes de la absorción y el tiempo promedio que pasa en el estado 2 antes de la absorción. Verifique que la suma de estas cantidades es igual al tiempo promedio hasta la absorción.
15. En promedio, ¿qué requiere menos lanzamientos, lanzar una moneda hasta obtener por primera vez el patrón AAS, es decir, hasta observar dos águilas seguidas de un sol, o lanzar una moneda hasta obtener ASA? ¿Puedes explicar por qué son diferentes?
16. Una cadena de Markov se mueve de la siguiente manera: Si en el instante  $n$  está en el estado  $m$ , en el siguiente instante su posición se distribuye uniformemente en los estados  $0, 1, \dots, m-1$ . Halle el valor esperado del tiempo transcurrido hasta que la cadena llegue a 0 por primera vez si comienza en  $m$ .
17. Considere una cadena de Markov cuya matriz de transición es  $P_7$ . Si la cadena comienza en 1, determine la probabilidad de que el proceso nunca visite el estado 2.
18. Una cadena de Markov se mueve de la siguiente manera: Si en el instante  $n$  está en la posición  $j$ , en el instante  $n+1$  su posición es 0 con probabilidad  $1/j$ , y su posición es  $k$  con probabilidad  $2k/j^2$ , para  $k = 1, 2, \dots, j-1$ . Halle el valor esperado del tiempo transcurrido hasta que la cadena llegue a 0 por primera vez si comienza en  $m$ .

19. Una cadena de Markov tiene matriz de transición  $P_8$  y comienza en el estado 0. Sabemos que el proceso terminará en el estado 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la última transición ocurra desde el estado 1? (Ayuda: Sea  $T_2 = \min\{n \geq 0 : X_n = 2\}$  y sea  $\eta_i = P(X_{T-1} = 1 | X_0 = i)$  para  $i = 0, 1$  Haciendo un razonamiento con la primera transición halle ecuaciones para  $\eta_0, \eta_1$  y resuélvalas).
20. Una caja contiene cinco bolas rojas y tres negras. Se seleccionan las bolas al azar, una a una. Si se selecciona una bola roja, se deja fuera de la caja. Si, por el contrario, se selecciona una bola negra, se vuelve a colocar en la caja. Este proceso continua hasta que todas las bolas rojas hayan sido sacadas de la caja. ¿Cuál es la duración promedio del proceso?
21. Sea  $N$  el número de veces que hace falta lanzar una moneda al aire hasta obtener Sol dos veces consecutivas. Halle una cadena de Markov que sirva de modelo a esta situación. Usando un análisis de la primera transición, halle el valor esperado del número de lanzamientos necesarios para obtener Sol dos veces consecutivas.
22. Se lanza una moneda repetidamente hasta obtener dos águilas o dos soles. Suponga que el resultado del primer lanzamiento es un águila. Halle la probabilidad de que la serie termine con el lanzamiento de dos soles.
23. Tienes cinco monedas y las lanzas al aire. Las que caen sol se vuelven a lanzar y se continúa así hasta que todas las monedas muestren águila. Sea  $X$  el número de monedas en el último lanzamiento. Halle  $P(X = 1)$ .
24. Se coloca una rata en el compartimiento 4 del laberinto que se muestra en la figura. La rata se mueve por los compartimientos al azar, es decir, si hay  $k$  salidas posibles de un compartimiento, la rata escoge entre ellas con probabilidad uniforme  $1/k$ . ¿Cuál es la probabilidad de que la rata encuentre la comida en el compartimiento 3 antes de sentir el shock eléctrico en el compartimiento 7?



25. Un jugador que juega a la ruleta hace una serie de apuestas de un peso y tiene un capital inicial de \$1.000. Su probabilidad de ganar en cada apuesta es  $9/19$  y de perder  $10/19$ . El jugador decide dejar de jugar cuando gane un peso (es decir, cuando su capital sea \$1001) o cuando se arruine. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador se arruine? (b) Halle el valor esperado de la pérdida.
26. Considere un paseo al azar simple y simétrico:  $P_{i+1} = P_{i-1} = 1/2$  para  $0 < i < N$ , con estados absorbentes en los extremos:  $P_{00} = P_{NN} = 1$ . Sea  $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ ó } X_n = N\}$ , el instante en el cual la cadena entra a un estado absorbente. Calcule  $E_i(T)$ , el valor esperado del intervalo de tiempo hasta que la cadena es absorbida si comienza de  $i$ . Calcule este valor esperado en los siguientes casos particulares:  $N = 25, i = 15$ ;  $N = 50, i = 30$ ;  $N = 250, i = 150$ ;  $N = 2500, i = 1500$ . Obtenga una ecuación para  $E_i(T)$  en el caso asimétrico  $P_{i+1} = p, P_{i-1} = q, p + q = 1$ , y compruebe que la siguiente función es solución de esta ecuación:

$$\frac{i}{q-p} \frac{N}{q-p} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N}.$$

27. Un jugador dispone de un capital de 2 pesos y necesita incrementarlo a 10. Puede jugar un juego con las siguientes reglas: se lanza una moneda balanceada, si el jugador apuesta correctamente ganará una suma igual a la suma apostada; si no, pierde el dinero apostado. El jugador decide usar la siguiente estrategia: a cada paso decide apostar todo su dinero si tiene 5 pesos o menos; en otro caso sólo apuesta lo necesario para incrementar su capital a 10 pesos, en caso de ganar. Sea  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ , el proceso que denota el capital del jugador después de  $n$  lanzamientos. (a) Justificar que el proceso es una cadena de Markov, determinar su espacio de estados y su matriz de transición. (b) Pruebe que la probabilidad de que el jugador logre juntar 10 pesos es  $1/5$ . (c) ¿Cuál es el tiempo esperado de la duración del juego? o dicho de otro modo ¿Cuál es el número esperado de lanzamientos necesarios para que el jugador logre alcanzar su objetivo o perder todo su capital? Indicación: se puede usar R, o Matlab en el cálculo de la solución.