

Modelos Estocásticos I

Problemas 4

Los problemas 1 y 2 son para entregar el miércoles 11/09/13

1. Considere el siguiente experimento en dos etapas: primero escogemos un punto X con distribución uniforme en $(0, 1)$; después escogemos un punto Y con distribución uniforme en $(-X, X)$. El vector aleatorio (X, Y) representa el resultado del experimento. ¿Cuál es su densidad conjunta? ¿Cuál es la densidad marginal de Y ? ¿Cuál es la densidad condicional de X dada Y ?
2. Definimos la varianza condicional de X dada Y por

$$\text{Var}(X|Y) = E(X^2|Y) - [E(X|Y)]^2$$

Sean X, Y variables aleatorias con segundo momento finito. (a) Demuestre que

$$\text{Var}(Y) = E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X))$$

(b) Sea Z otra v.a. Demuestre la siguiente fórmula

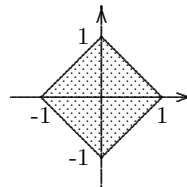
$$\text{Cov}(X, Y) = E[\text{Cov}((X, Y|Z))] + \text{Cov}(E(X|Z), E(Y|Z)),$$

donde definimos $\text{Cov}((X, Y)|Z) = E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)$.

3. Si X tiene densidad $f(x) = e^{-|x|/2}$, $x \in \mathbb{R}$, ¿Cuál es la distribución de $Y = |X|$?
4. Escogemos cinco puntos al azar de manera independiente en el intervalo $[0, 1]$. Sea X el número de puntos que pertenecen al intervalo $[0, c]$, donde $0 < c < 1$ es un número fijo. ¿Cuál es la distribución de X ?
5. Una caja tiene tres bolas numeradas 1, 2 y 3. Sacamos dos bolas al azar, sucesivamente y sin reposición. Sea X el número en la primera e Y el número en la segunda. (a) Describa la distribución conjunta de X e Y . (b) Calcule $P(X < Y)$. (c) Determine las distribuciones marginales de las variables X e Y . ¿Son independientes?
6. Seleccionamos al azar un punto en el círculo unitario $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y sean (X, Y) las coordenadas del punto seleccionado. (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de (X, Y) ? (b) Determine $P(X < Y)$, $P(X > Y)$, $P(X = Y)$.
7. Seleccionamos al azar un punto en el cuadrado unitario $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Sean (X, Y) las coordenadas del punto seleccionado. (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de (X, Y) ? (b) Calcule $P(|(Y/X) - 1| \leq 1/2)$. (c) Calcule $P(Y \geq X | Y \geq 1/2)$.
8. Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta $F(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$ para $x, y \geq 0$ y $F(x, y) = 0$ en cualquier otro caso. Halle la densidad conjunta y las densidades marginales. ¿Son X e Y independientes?
9. Sea X, Y, Z variables aleatorias independientes cada una con distribución uniforme en $[0, 1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $Xt^2 + Yt + Z = 0$ tenga soluciones reales?
10. Sean $X \sim \mathcal{U}[0, a]$, $Y \sim \mathcal{U}[a, a + b]$, donde $a, b > 0$ variables aleatorias independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres segmentos $[0, X]$, $[X, Y]$, $[Y, a + b]$ puedan formar un triángulo?
11. Seleccionamos al azar (es decir, con distribución uniforme) un punto en la siguiente región

Sean X e Y las coordenadas del punto.

- (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y ?
- (b) Obtenga la densidad marginal de X .
- (c) ¿Son X e Y independientes?



12. Sean X_1, \dots, X_n v.a.i. con distribución exponencial de parámetros respectivos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (a) Demuestre que la distribución de $Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ también es exponencial ¿Cuál es su parámetro? (b) Demuestre que para $k = 1, \dots, n$

$$P(X_k = \min_{1 \leq i \leq n} X_i) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

(Sugerencia: X_k e Y son independientes y tienen distribución exponencial. Considere el evento $\{X_k < \min_{i \neq k} X_i\}$).

13. Sea X una variable cuya función de distribución F es continua en la recta. Demuestre que la distribución de $Y = F(X)$ es $\mathcal{U}[0, 1]$.
14. Sea A el triángulo de vértices $(0, 0); (1, 0); (0, 1)$ y suponga que X, Y tienen densidad conjunta $f(x, y) = C \mathbf{1}_A(x, y)$. (a) Determine el valor de la constante C . (b) Halle las distribuciones marginales de X e Y y la de $Z = X + Y$. (c) ¿Son X e Y independientes? ¿Por qué?
15. Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{N}(0, 1)$. Demuestre que $U = (X + Y)/\sqrt{2}$ y $V = (X - Y)/\sqrt{2}$ también son independientes y tienen distribución $\mathcal{N}(0, 1)$.
16. Sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{U}(0, 1)$. Halle la densidad conjunta de W y Z , donde $W = X + Y$ y $Z = X - Y$. ¿Son estas variables independientes?
17. Sea X una v.a. $\mathcal{N}(0, 1)$. Calcule la densidad de $Y = X^4$ y la de $Z = 1/X$. ¿Tienen densidad conjunta Y y Z ? ¿Por qué?
18. Sean X, Y v. a. i. tales que $X \sim \text{Bin}(m, p)$ e $Y \sim \text{Bin}(n, p)$. Obtenga la distribución condicional de X dada $X + Y$. ¿Cómo se llama esta distribución?
19. Se observan dos focos durante su vida útil. Suponga que sus tiempos de vida son independientes y exponenciales de parámetro λ . Sea X el tiempo de vida del primer foco en apagarse e Y el tiempo de vida del otro foco. (a) ¿Cuál es la distribución condicional de X dada Y ? ¿Cuál es la distribución de Y dada X ?
20. Suponga que (X, Y) tiene distribución uniforme en A , donde A es una región del plano de área positiva y finita. Demuestre que la distribución condicional de X dado que $Y = y$ es uniforme en A_y , la sección de A en y , que definimos $A_y = \{x : (x, y) \in A\}$.
21. Demuestre que si $P(X \in B | Y = y) = P(X \in B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e $y \in \mathbb{R}$, entonces X e Y son independientes.
22. Sea X una v.a. con densidad $f(x)$, f continua. ¿Cuál es la distribución condicional de X dada $|X|$?
23. Sean X, Y el mínimo y el máximo, respectivamente de dos variables aleatorias independientes con distribución común $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Demuestre que $(Y - X) | X \sim \text{Exp}(\lambda)$.
24. Sean X_1, \dots, X_n v.a.i.i.d. con distribución continua F . Sea $X = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. (a) Demuestre que para todo $k = 1, 2, \dots, n$,

$$P(X_k \leq x | X = t) = \begin{cases} \frac{(n-1)F(x)}{nF(t)}, & \text{si } x < t, \\ 1, & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

(Sugerencia: $x^n - y^n = (x - y)(X^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$). (b) Suponga que F es diferenciable. ¿Existe la densidad condicional para la distribución anterior?

25. Sean X, Y v.a. tales que $E(X^2) < \infty$, $E(Y^2) < \infty$. Demuestre que $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, E(Y|X))$.
26. Suponga que X, Y tienen densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Halle la distribución condicional de Y dada X . Calcule $E(Y|X)$. (b) ¿Son X, Y independientes? ¿Por qué? (c) Demuestre que estas variables no están correlacionadas.

27. Sean X, Y v.a.i. con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. ¿Cuál es la distribución condicional de (X, Y) dada $\sqrt{X^2 + Y^2}$, la distancia de (X, Y) al origen?