

Modelos Estocásticos I

Problemas 2

Los problemas 1 y 2 son para entregar en hojas distintas el miércoles 28/08/13.

1. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad con $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \Omega\}$, y sean U, V, W y Z funciones definidas en Ω por

$$U(\omega) = 3\omega + 2, \quad V(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \leq 3 \\ 1 & \text{si } \omega > 3 \end{cases} \quad W(\omega) = \omega^2, \quad Z(\omega) = \sin(\omega\pi).$$

- a) Determine cuáles de estas funciones son variables aleatorias sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) .
b) Para las que sean variables aleatorias, halle la función de probabilidad y la función de distribución asociadas, suponiendo que todos los puntos de Ω son igualmente probables.
c) Para las que no sean variables aleatorias, determine cuál es la σ -álgebra generada por la función correspondiente y en este caso determine la función de probabilidad y la función de distribución asociadas.
2. Sea F una función de distribución. Demuestre que F tiene, a lo sumo, una cantidad numerable de discontinuidades. Si F es continua demuestre que F es uniformemente continua.
3. Sea F la función dada por

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{i}, \infty)}.$$

Demuestre que F es una función de distribución en \mathbb{R} . Sea P la medida de probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos

- a) $A = [1, \infty)$ b) $B = (\frac{1}{10}, \infty)$ c) $C = \{0\}$ d) $D = [0, \frac{1}{2})$ e) $E = (-\infty, 0)$ f) $F = (0, \infty)$.
4. **Desigualdades de Bonferroni.** Sea $A_i \in \mathcal{F}$, $i \geq 1$ una sucesión de eventos. Demuestre
- a) $P(\cup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j)$
b) $P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$
c) Llamemos $S_k = \sum P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$, donde la suma se toma sobre todas las k -uplas ordenadas de enteros $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Demuestre que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} S_j, \quad \text{para } k \text{ impar,}$$
$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} S_j, \quad \text{para } k \text{ par,}$$

5. Suponga que $\{B_n, n \geq 1\}$ son eventos con $P(B_n) = 1 \forall n$. Demuestre que $P(\cap_{n=1}^{\infty} B_n) = 1$.
6. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de conjuntos disjuntos 2 a 2 y P una probabilidad. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.
7. Sean A, B, C eventos disjuntos en un espacio de probabilidad con $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.1$. Calcule las probabilidades de todos los eventos de $\sigma(A, B, C)$.
8. Lanzamos una moneda n veces y obtenemos k soles. Demuestra que la probabilidad condicional de obtener sol en cualquier lanzamiento específico, dado que hay k soles en total es k/n .
9. **La paradoja de Galton.** Si lanzamos tres monedas al menos dos de ellas son iguales, y la tercera tiene probabilidad $1/2$ de caer águila o sol, de modo que la probabilidad de que las tres sean iguales es $1/2$. En realidad la probabilidad de que las tres monedas sean iguales es $1/4$. ¿Qué está mal en el razonamiento anterior?

10. **La paradoja de Simpson.** Un fabricante de focos tiene dos plantas. La planta A vende lotes de focos que consisten de 1000 focos regulares y 2000 focos ahorradores. A través de pruebas de control de calidad se sabe que, en promedio, hay 2 focos regulares y 11 ahorradores defectuosos por lote. En la planta B se venden lotes de 2000 focos regulares y 1000 ahorradores, y en promedio hay 5 regulares y 6 ahorradores defectuosos por lote.

El gerente de la planta A afirma que ellos son más eficientes pues sus tasas de focos defectuosos son 0.2% y 0.55% mientras que para la otra planta son 0.25% y 0.6%. Por su parte el gerente de la planta B responde diciendo ‘cada lote de 3000 focos que producimos contiene 11 focos defectuosos, comparado con 13 defectuosos para los focos producidos por A , de modo que nuestra tasa de 0.37% de focos defectuosos es inferior a la de ellos, que es 0.43%. ¿Quién tiene la razón?

11. El evento A atrae al evento B si $P(B|A) > P(B)$ y lo repele si $P(B|A) < P(B)$. a) ¿Es transitiva esta relación? b) Demuestre que si A atrae a B y a C pero repele a $B \cap C$, entonces A atrae a $B \cup C$. c) ¿Es posible que A atraiga a B y a C pero repele a $B \cup C$? d) Demuestre que si B_1, \dots, B_n es una partición del espacio muestral y A atrae algún B_j entonces debe repeler a algún B_i , $i \neq j$.
12. Determine el valor de la constante A para que las siguientes sean funciones de probabilidad.

$$\text{a) } P(X = i) = \begin{cases} Ai & i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{b) } P(X = i) = \begin{cases} A/2^i & i = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\text{c) } P(X = i) = \begin{cases} A/3^i & i = 1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1 \\ A/4^i & i = 2, 4, 6, 8, \dots, 2n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

13. ¿Para qué valores de C y α es la función p definida por $p(n) = Cn^\alpha$ para $n \in \mathbb{N}$ una función de probabilidad?
14. Halle la función de probabilidad de la variable aleatoria X si su función de distribución F está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{3}{4} & \text{para } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 1 & \text{para } \frac{3}{4} \leq x. \end{cases}$$

15. Una caja tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Seleccionamos dos bolas al azar con reposición de la caja. Sea X el mayor de los dos números, calcule la función de probabilidad de X . Resuelva también este problema para el caso de muestreo sin reposición.
16. Verifique que las siguientes funciones son densidades y obtenga la función de distribución correspondiente.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{para } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) & \text{para } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

17. Sea X una variable aleatoria con valores en $[0, 1]$ y función de distribución $F(x) = x^2$. ¿Cuál es la densidad de X ? Calcule las siguientes probabilidades:

$$\text{a) } P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right), \quad \text{b) } P(X > 1/2), \quad \text{c) } P(X \leq 3/4 | X > 1/2).$$

18. Sea F la función de distribución dada por

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0, \infty)}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1, \infty)}(x) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2, \infty)}(x)$$

y sea P la probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

$$\text{a) } A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{b) } B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{c) } C = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \quad \text{d) } D = [0, 2) \quad \text{e) } E = (3, \infty).$$

19. Sean X e Y variables aleatorias independientes cada una con densidad uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Hallar la densidad conjunta de las variables U y V , donde $U = \max(X, Y)$ y $V = \min(X, Y)$.