Modelos Estocásticos I

Problemas 9

Los problemas ___, ___, ___ y ___ son para entregar el miércoles 17/10/10

1. Considere una cadena de Markov sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ tal que a partir del estado i, la cadena va a $i+1$ con probabilidad p, $0 < p < 1$, y va al estado 0 con probabilidad $1-p$.

   a) Demuestre que esta cadena es irreducible.

   b) Calcule $P_0(T_0 = n)$, $n \geq 1$.

   c) Demuestre que la cadena es recurrente.

2. Un sistema puede estar en cuatro estados, 1, 2, 3 y 4. Si el sistema está en el estado j, $j < 4$, en el siguiente paso se mueve al estado $j+1$. Desde el estado 4, el sistema pasa a 2 o a 3 con probabilidad $1/2$ en cada caso. Halle la matriz de transición. Clasifique los estados y calcule la matriz de transición en n pasos para $n = 2$ y $n = 16$.

3. Determine las clases de equivalencia, los estados transitorios, los estados recurrentes y los conjuntos cerrados para las cadenas con las siguientes matrices de transición:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

4. Determine las clases de equivalencia y clasifique los estados en transitorios o recurrentes para una cadena de Markov con las siguientes matrices de transición. Determine también los subconjuntos cerrados e irreducibles del espacio de estados.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y matriz de transición

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   a) Determine las clases de equivalencia. ¿Cuáles son cerradas?

   b) Determine cuáles estados son transitorios y cuáles recurrentes.

   c) Halle ρ_{0j} para $j = 0, 1, \dots, 6$.

6. Determine las clases de equivalencia y clasifique los estados de la cadena de Markov con las siguientes matrices de transición

$$a) \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}
$$

7. Sean $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con valores en $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ con distribución común $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$. Sea $X_0 = 0$ y definimos

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} \quad (\text{módulo } 5).$$

Demuestre que X_n es una cadena de Markov. Halle su espacio de estados y su matriz de transición. Observe que en esta matriz cada columna suma 1. Este tipo de matrices se conoce como *doblemente aleatorias*. *Observación:* Para $x, y \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la suma módulo n se define como

$$x + y \ (\text{módulo } n) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x + y < n, \\ x + y - n & \text{si } x + y \geq n \end{cases}$$

8. Definimos el instante de la k-ésima visita al estado j por

$$T_j^k = \min\{n > T_j^{k-1} : X_n = j\}$$

para $k \geq 1$ y ponemos $T_j^0 = 0$. Con esta definición T_j^1 coincide con T_j, como fue definido en clases. Demuestre que para $k \geq 1$, $P_i(T_j^k < \infty) = \rho_{ij}\rho_{jj}^{k-1}$.

9. Con las definiciones vistas en clase, demuestre que

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^{n} P_i(T_j = m) P_{jj}^{n-m},$$

para $n \geq 1$. Demuestre que si a es un estado absorbente, $P_{ia}^n = P_i(T_a \leq n)$, para $n \geq 1$.

10. a) Demuestre que $\rho_{ij} > 0$ si y sólo si $P_{ij}^n > 0$ para algún entero positivo n.

    b) Demuestre que si $P_{ij} = 0$ siempre que $i \in C$, $j \notin C$, entonces C es cerrado.

11. Decimos que una v. a. T es un *tiempo de parada* para el proceso $(X_n)_{n\geq 1}$ si, para cada n, es posible determinar si el suceso $\{T = n\}$ ocurrió o no observando los valores del proceso hasta el tiempo n: $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

    a) Sea i un estado cualquiera de la cadena. Demuestre que T_i, el instante de la primera visita a i, es un tiempo de parada pero τ_i, el instante de la última visita a i, no lo es.

    b) Demuestre la siguiente propiedad (que es una versión de la Propiedad Fuerte de Markov)

$$P(X_{T+1} = j | X_k = i_k \text{ para } 0 \leq k < T, X_T = i) = P(X_{T+1} = j | X_T = i).$$

12. Lanzamos un dado repetidamente. determine cuáles de los siguientes procesos son cadenas de Markov. Para las que son, halle las matrices de transición y halle también $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$.

    a) El mayor número hasta el instante n.

    b) El número de lanzamientos hasta el próximo 6 después del instante n.

    c) El número de veces que se ha salido el 6 hasta el instante n.