Modelos Estocásticos I

Problemas 11

Los problemas ___, ___ y 17 son para entregar el jueves 03/11/11

1. Sea $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ un paseo al azar simétrico ($P(\xi_j = 1) = 1/2 = P(\xi = -1)$) que comienza en 0: $S_0 = 0$. Sea $M_n = \max_{0\le j\le n} S_j$ y N un entero positivo. Demuestre que
$$P(M_n \ge N) = 2P(S_n \ge N) - P(S_n = N)$$
$$P(M_n = N) = P(S_n = N) + P(S_n = N+1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\left[\frac{n+N}{2}\right]}$$

2. Usando el resultado anterior demostrar que
$$\begin{aligned} P(S_j \neq 0, 1 \le j \le n+1) &= P(M_n \le 0) \\ &= P(S_n = 0) + P(S_n = 1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{[n/2]} \\ P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0, S_{n+1} = 0) &= P(M_{n-1} \le 0, S_n > 0) \end{aligned}$$

3. Usando el Teorema Central de Límite de DeMoivre-Laplace demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \le x) = 2\Phi(x) - 1$$
donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de una variable normal de media cero y varianza 1.

4. Sea $T_k = \min\{n \ge 1 : S_n = k\}$. Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{T_n}{n^2} \le x) = 2(1 - \Phi(1/\sqrt{x})), \quad \text{para } x > 0.$$
Ayuda: Use el resultado del ejercicio 3

5. Demuestre que para un paseo al azar simétrico la probabilidad de que en el período $[0, 2n]$ la última visita al origen ocurra en el instante $2k$ es
$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

6. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i,\ n \ge 1$ un paseo al azar simple con $P(\xi = 1) = p = 1 - P(\xi_i = -1)$, con $p \le 1/2$. Demuestre que para cualquier entero k
$$P\Big(\cup_{n\ge1}\{S_n \ge k\}\Big) = \Big[P\Big(\cup_{n\ge1}\{S_n \ge 1\}\Big)\Big]^k$$
Ayuda: Dado que el paseo llega al nivel 1, considere un nuevo paseo que inicia en ese momento y explore la probabilidad de que el paseo llegue a un nivel que sea una unidad mayor que su nivel de inicio.

7. En las condiciones del ejercicio anterior, halle una ecuación cuadrática para
$$y = P\Big(\cup_{n\ge1}\{S_n \ge 1\}\Big)$$
haciendo un análisis de la primera transición. Para $p < 1/2$ demuestre que las raíces de esta ecuación son $p/(1-p)$ y 1. Dé un argumento para desechar la solución 1 y por lo tanto la probabilidad debe valer $p/(1-p)$. Para $p = 1/2$ demuestre que la ecuación tiene una raíz doble que vale 1. Para $p < 1/2$ demuestre que $p/(1-p) = \exp(-r^*)$ donde r^* es la única raíz positiva de $g(s) = 1$, donde $g(s) = \mathrm{E}(e^{s\xi})$.

8. Sea $Z = \sum_{n=0}^\infty X_n$ el tamaño total de una familia en un proceso de ramificación en el cual el número de descendientes por individuo tiene media $\mu = \mathrm{E}(\xi) < 1$. Suponiendo que $X_0 = 1$, demuestre que $\mathrm{E}(Z) = 1/(1-\mu)$.

9. En cada etapa de un multiplicador de electrones, cada electrón, al pegar en la placa, genera un número de electrones con distribución de Poisson de media λ. Determine la media y la varianza del número de electrones en la n-ésima etapa.

   Si $\lambda = 1.1$ calcule la probabilidad de extinción $u_n = P(X_n = 0|X_0 = 1)$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. ¿Cuánto vale la probabilidad de extinción final u_∞?

10. Suponga que $p_k = P(\xi = k) = ap^{k-1}$, para $k = 1, 2, 3, \dots$ donde $0 < p < 1$, $0 < a < (1-p)$ y

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - \frac{a}{1-p} = \frac{1-(p+a)}{1-p}.$$

   a) Halle la f. g. p. correspondiente $\phi(s)$ y calcule la media μ de la distribución.

   b) Demuestre que la ecuación $\phi(u) = u$ tiene como raíces positivas 1 y

$$u = \frac{1-(p+a)}{p(1-p)}.$$

   c) Demuestre que $u_\infty = 1$ si y sólo si $\mu \leq 1$.

11. En cierta sociedad las familias escogen el número de hijos que van a tener de acuerdo a la siguiente regla: Si el primer hijo es una niña, tienen exactamente un hijo más. Si el primer hijo es un niño, continúan teniendo hijos hasta tener la primera niña y allí se detienen. Sea ξ el número de hijos varones en una familia particular. ¿Cuál es la función generadora de ξ? Determine la media de ξ directamente y diferenciando la función generadora.

12. Sea X_n un proceso de ramificación que inicia con un sólo individuo. Halle la probabilidad de extinción en los siguientes casos: (a) $P(\xi = 0) = 1/2$, $P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = 1/4$. (b) $P(\xi = 0) = P(\xi = 1) = 1/4$, $P(\xi = 2) = 1/2$. En cada caso halle también la probabilidad de extinción si la población inicia con k individuos.

13. En el instante inicial un cultivo de células comienza con una célula de tipo A. Al final de un minuto esta célula muere y da origen a alguna de las siguientes combinaciones con las probabilidades indicadas: 2 células tipo A con probabilidad $1/4$, una célula tipo A y una tipo B con probabilidad $2/3$ y dos células tipo B con probabilidad $1/12$. Las células tipo A viven por 1 minuto y se reproducen como hemos descrito. Las células tipo B mueren al cabo de 1 minuto sin reproducirse y todas las células actúan de manera independiente. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no hayan aparecido células tipo B al cabo de n minutos y medio? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el cultivo de células se extinga en algún momento?

14. Considere un proceso de ramificación con $\phi(s) = as^2 + bs + c$ con $a > 0, b > 0, c > 0$, $\phi(1) = 1$. Halle la probabilidad de extinción y dé una condición para que esta probabilidad valga 1.

15. Considere un proceso de ramificación en el cual la descendencia se genera de acuerdo a una distribución de Bernoulli con función generadora de probabilidad $\phi(s) = q + ps$ y sea $T = \inf\{n : X_n = 0\}$. (a) Halle $P(T = n)$ para $n \geq 1$. (b) Halle $P(T = n)$ si la población inicial tiene k individuos.

16. Considere un proceso de ramificación en el cual la descendencia se genera de acuerdo a una distribución con función generadora de probabilidad

$$\phi(s) = 0.15 + 0.05s + 0.03s^2 + 0.07s^3 + 0.04s^4 + 0.25s^2 + 0.05s^6$$

   Halle la probabilidad de extinción.

17. Este problema hace referencia a la hoja de problemas 10. En esa hoja debes escoger uno de los problemas del 3 al 7, o el 10, preferiblemente uno que ya hayas resuelto. El objetivo de este ejercicio es hacer un programa que simule las trayectorias de la cadena de Markov con la matriz de transición del ejercicio y distribución inicial según se indica también en el ejercicio. Una vez que tengas el programa simula 1000 trayectorias de la cadena y con los resultados estima los valores esperados que se pedían en el problema original. Compara ambos valores y comenta.