

Nombre: _____

Modelos Estocásticos I
Primer Examen Parcial
Viernes 23/09/11, 11 a.m. – 3 p.m.

1. Sea X el número de **fracasos** que ocurren hasta obtener el primer éxito en una sucesión de ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito α .

a) Halle la función generadora de probabilidad de X y con ella obtenga la media y varianza de X .

b) Sea N el número de veces que una persona visita una tienda en un año y suponga que N sigue la distribución de la parte (a), pero con probabilidad de éxito igual a $1 - \theta$. Durante cada visita la persona compra algo con probabilidad p . Supongamos que en las distintas visitas que realiza la persona las compras son independientes y también son independientes del número de visitas que la persona realiza a la tienda. Sea S el número de veces que la persona compra algo de la tienda durante un año. Usando funciones generadoras de probabilidad demuestre que S tiene la misma distribución que N pero con el parámetro θ cambiado por $Q = p\theta/(1 - q\theta)$, donde $q = 1 - p$. ¿Cuál es el valor esperado del número de veces que la persona compra algo en la tienda durante un año?

2. Sean X, Y v.a. con densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 4y(x - y)e^{-(x+y)}, & 0 < x < \infty, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Son independientes estas variables? Halle la densidad condicional de X dado Y . Calcule $E[X|Y = y]$ y $E[X|Y]$.

3. (a) Explique cómo funciona el método de rechazo para generar variables aleatorias discretas. Demuestre que el método produce variables con la distribución deseada.

(b) Describa un algoritmo para simular valores de una variable aleatoria con la siguiente densidad:

$$f(x) = \frac{e^x}{e - 1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

4. Demuestre que, para una sucesión de variables aleatorias X_n definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , convergencia en L^p implica convergencia en probabilidad y que convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución. Dé ejemplos que demuestren que las implicaciones recíprocas son falsas.