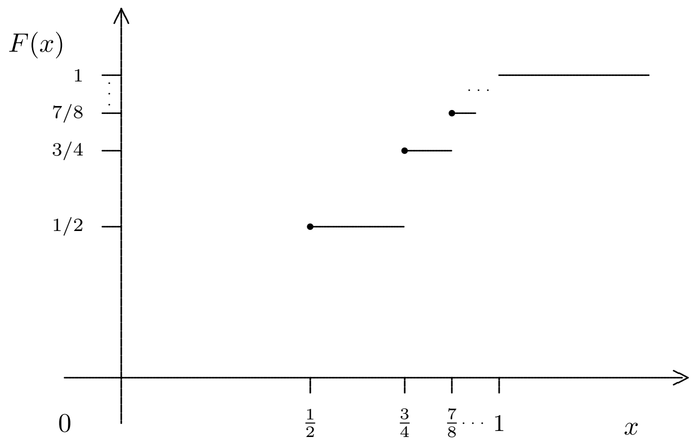
Modelos Estocásticos I

Primer Examen Parcial

Respuestas

1. *Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores en el conjunto $\{x_i = 1 - 2^{-i}, i \geq 1\}$, con probabilidades respectivas $p_i = 2^{-i}$. Describa la función de distribución asociada. Calcule la probabilidad de que la variable tome valores en los intervalos $(1/2, 7/8]$ y $(3/4, 1]$. ¿Cuál es la media y la varianza de esta variable?*

   Respuesta. La función de distribución de X vale 0 hasta $x = 1/2$, donde tiene un salto de altura $1/2$. Desde ese punto en adelante, el siguiente salto está a la mitad de la distancia que hay hasta 1 y tiene altura igual a la mitad del salto anterior. Así, el siguiente salto está en $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ y tiene altura $\frac{1}{4}$, luego el siguiente en $7/8$ con altura $1/8$, etc. A partir de $x = 1$ la función vale 1.



$$
\begin{aligned}
P(\frac{1}{2} < X \leq \frac{7}{8}) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}, \\
P(\frac{3}{4} < X \leq 1) &= 1 - P(X \leq \frac{3}{4}) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \\
\mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} (1 - 2^{-i}) 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i} \\
&= \frac{1}{1 - 1/2} - 1 - \frac{1}{1 - 1/4} + 1 = \frac{2}{3}, \\
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{i=1}^{\infty} (1 - 2^{-i})^2 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - 2 \cdot 2^{-i} + 2^{-2i}) 2^{-i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (2^{-i} - 2 \cdot 2^{-2i} + 2^{-3i}) = \frac{10}{21}.
\end{aligned}
$$

   Finalmente, usando la fórmula $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) = (\mathrm{E}(X))^2$ obtenemos que

$$
\mathrm{Var}(X) = \frac{10}{21} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{63}.
$$

2. *Sea A el triángulo de vértices $(0,0); (1,0); (0,1)$ y suponga que X, Y tienen densidad conjunta uniforme en el triángulo. (a) Halle las distribuciones marginales de X e Y y la distribución de $Z = X + Y$. (b) ¿Son X e Y independientes? ¿Por qué?*

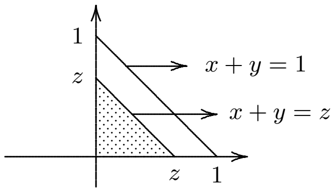
   Respuesta. (a) La densidad conjunta de X, Y es

$$
f(x, y) = 2\mathbf{1}_{\triangle}(x, y)
$$

donde $\mathbf{1}_\triangle(x, y)$ es la función indicadora del triángulo. El triángulo está limitado por los ejes y la recta $x + y = 1$. Por lo tanto

$$f_X(x) = \int \mathbf{1}_\triangle(x, y)\, dy = \int_0^{1-x} 2\, dy = 2(1 - x),$$

y de manera similar se obtiene que $f_Y(y) = 2(1-y)$. Para hallar la distribución de $Z = X+Y$ observamos que la recta $x+y = z$ es paralela a la recta $x+y = 1$ y pasa por los puntos $(z, 0)$ y $(0, z)$ (ver gráfica). Por lo tanto la probabilidad de que $Z \leq z$ es la probabilidad de que el punto de coordenadas (X, Y) esté en un triángulo limitado por los ejes y la recta $x + y = z$, y como la densidad es uniforme, esta probabilidad vale 2 veces el área del triángulo, es decir, z^2.



(b) Las variables no son independientes porque la densidad conjunta no es igual al producto de las densidades marginales.

3. *Sea X, Y variables aleatorias con densidad conjunta*

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{y} \exp\{\frac{x}{y} - y\} \quad \text{para } x, y > 0.$$

Halle la densidad condicional de $X|Y = y$. Halle $\mathrm{E}(X|Y)$.

Respuesta. Comenzamos por calcular la densidad marginal de Y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^\infty f(x, y)\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y} - y} dx \\ &= e^{-y} \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}} dx = e^{-y} \left(-e^{-x/y} \Big|_0^\infty \right. \\ &= e^{-y}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la densidad de X condicional a $Y = y$ es

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y} - y}}{e^{-y}} = \frac{1}{y} e^{-\frac{x}{y}}$$

que es una exponencial de parámetro $1/y$ y valor esperado y. Por lo tanto

$$\mathrm{E}(X|Y) = Y.$$

4. *Felipe lanza un dado balanceado hasta obtener un cuatro, luego Diana lanza una moneda balanceada tantas veces como Felipe lanzó el dado. Sea X el número de águilas que Diana obtiene. Halle la función generadora de probabilidad de X y determine su valor esperado y varianza.*

Respuesta. Llamemos N al número de lanzamientos del dado y Y_i al resultado del i-ésimo lanzamiento de la moneda. N tiene distribución geométrica de parámetro $1/6$ mientras que las $Y_i,\ i \geq 1$ son independientes y tienen distribución de Bernoulli con parámetro $1/2$. Tenemos además que

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

y por la proposición 1.2 de las notas del curso, su f.g.m. es la composición de las f.g.m. de N y Y_i. La f.g.m. de N es

$$\phi_N(s) = \mathrm{E}(s^N) = \sum_{n=1}^\infty s^n \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} = \frac{s}{6} \sum_{n=1}^\infty \frac{5s}{6} = \frac{s}{6 - 5s},$$

y la de Y es

$$\phi_Y(s) = \mathrm{E}(S^Y) = s\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = (s+1)/2.$$

Usando el resultado mencionado tenemos

$$\phi_X(s) = \phi_N(\phi_Y(s)) = \frac{(s+1)/2}{6-5(s+1)/2} = \frac{s+1}{12-5(s+1)} = \frac{s+1}{7-5s}.$$

Para hallar el valor esperado derivamos esta expresión y hacemos $s = 1$:

$$\phi'_X(s) = \frac{12}{(7-5s)^2}; \qquad \mathrm{E}(X) = \phi'_X(1) = 3.$$

La segunda derivada evaluada en 1 nos da el segundo momento factorial:

$$\phi''_X(s) = \frac{120}{(7-5s)^3}; \qquad \mathrm{E}(X(X-1)) = \phi''_X(1) = 15.$$

Por lo tanto $\mathrm{E}(X^2) = 15 + \mathrm{E}(X) = 18$ y $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 9$.

5. *(a) Explique cómo funciona el método de rechazo para generar variables aleatorias discretas. Demuestre que el método produce variables con la distribución deseada.*

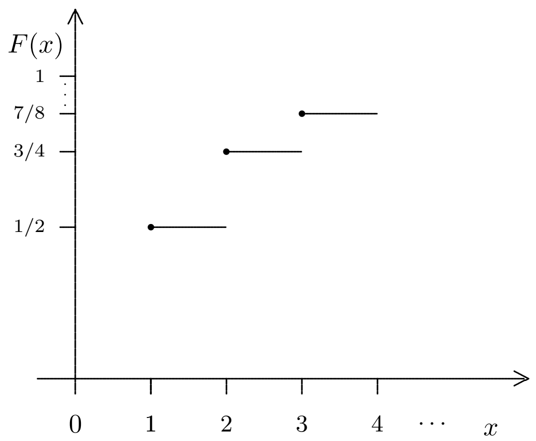
(b) De un algoritmo para simular valores de una variable aleatoria con la siguiente distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{\lfloor x+1 \rfloor} & \text{para } x \geq 1, \end{cases}$$

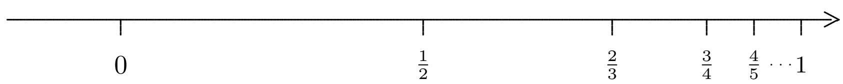
donde $\lfloor a \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que a.

Respuesta. (a) Ver notas del curso.

(b) Observamos que esta función de distribución corresponde a una variable aleatoria que toma valores en $\mathbb{N}$ y los valores sucesivos de la f.d. son $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{k}{k+1}, \dots$.



Un primer algoritmo, usando el método de la transformada inversa, sería generar una variable aleatoria uniforme U y si su valor es menor o igual que $1/2$, ponemos $X = 1$, si $1/2 < U \leq 2/3$, ponemos $X = 2$ y en general si $(k-1)/k < U \leq k/(k+1)$ ponemos $X = k$. Es decir, dividimos el intervalo $(0,1)$ usando los números de la forma $k/(k+1)$ para $k \in \mathbb{N}$ y observamos en cuál intervalo cae U, o equivalentemente cuál es el menor número de la forma $k/(k+1)$ que es mayor o igual a U.



Queremos entonces el menor entero k tal que

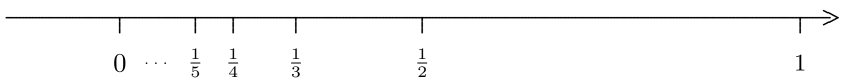
$$U \leq \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1},$$

o equivalentemente el menor entero k que satisface

$$k \geq \frac{1}{1-U} - 1$$

es decir, $k = \lceil 1/(1-U) \rceil - 1$. Finalmente, observando que si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ entonces también $1-U \sim \mathcal{U}(0,1)$ tenemos $k = \lceil 1/U \rceil - 1$.

Una segunda manera de obtener este resultado es observar que podemos colocar los intervalos en orden inverso, es decir, en lugar de colocar el intervalo de longitud $1/2$ al inicio, lo colocamos al final: $[1/2, 1)$. El siguiente, que antes iba de $1/2$ a $2/3$, ahora va de $1/3$ a $1/2$: $[1/3, 1/2)$, y así sucesivamente. Esto es una manera complicada de decir que si usamos los números de la forma $1/(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$ para dividir el intervalo $(0,1)$ obtenemos intervalos de igual longitud que los que obtuvimos en el primer algoritmo, pero colocados en otro orden.



Ahora, para hallar el valor de X tenemos que hallar el menor entero k tal que $1/(k+1) \leq U$. Por lo tanto $X = \lceil 1/U \rceil - 1$.