Modelos Estocásticos I

Problemas 8

Los problemas 3, 5, 7 y 12 son para entregar el martes 28/09/10

1. Sea $X_n,\ n \geq 0$ una cadena de Markov y sea $\{n_k, k \geq 0\}$ una sucesión creciente y no acotada de enteros positivos. Demuestre que $Y_k = X_{n_k}$ también es una cadena de Markov, posiblemente no-homogénea. Halle la matriz de transición de Y cuando $n_k = 2k$ y X es el paseo al azar simple.

2. Considere una sucesión infinita de ensayos de Bernoulli independientes y simétricos ($p = q = 0.5$). Sea A_n el número de éxitos al cabo de n lanzamientos y B_n el número de fracasos. Considere $X_n = A_n - B_n$, $Y_n = |A_n - B_n|$. Determine si X_n, Y_n son cadenas de Markov y en caso afirmativo halle sus matrices de transición.

3. Dada cualquier matriz de transición P, demuestre que es fácil aumentarla añadiendo nuevos estados que tienen acceso a los estados iniciales, pero es imposible añadir un nuevo estado que se comunique con alguno de los estados iniciales.

4. En la estrategia 'doble o nada' el jugador apuesta todo lo que tiene y tiene probabilidad 0.5 de duplicar su capital o de perderlo todo. Suponga que comienza con 1 peso y decide jugar n juegos o hasta que se arruine. Describa la cadena de Markov y halle su matriz de transición.

5. (a) Un esquema similar al modelo de Ehrenfest, usado por Daniel Bernoulli y Laplace para estudiar el flujo de líquidos incompresibles entre dos recipientes, es el siguiente. Hay N bolas blancas y N negras en dos cajas, cada una de las cuales contiene N bolas. Se selecciona una bola de cada caja y se coloca en la otra. Halle la matriz de transición para el número de bolas blancas en la primera caja.

   (b) Considere dos cajas, A y B, que contienen un total de N bolas. Se selecciona una bola al azar del total de N bolas y luego se selecciona una caja, A con probabilidad p y B con probabilidad $q = 1 - p$ y la bola seleccionada se coloca en esta caja. El estado del sistema está representado por el número de bolas en A. Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov.

   (c) Considere dos cajas, A y B, que contienen un total de N bolas. Suponga que en el instante n la caja A tiene exactamente k bolas. En el instante $n+1$ se selecciona una caja al azar proporcionalmente al número de bolas que contiene, es decir, la caja A tiene probabilidad k/N de ser escogida. Luego se selecciona una bola de A con probabilidad p o de B con probabilidad q y se coloca en la caja que ha sido seleccionada. Determine la matriz de transición para esta cadena de Markov.

6. Considere dos cajas, A y B, que contienen un total de N bolas. Suponga que en el instante n la caja A tiene exactamente k bolas. En el instante $n + 1$ se seleccionan una caja y una bola al azar, proporcionalmente al número de bolas que contiene cada caja, es decir, se selecciona una bola de la caja A con probabilidad k/N. Esta bola se coloca en la caja A con probabilidad k/N y en la caja B con probabilidad $(N - k)/N$. Determine la matriz de transición para esta cadena de Markov.

7. Sea $\xi_n,\ n \geq 1$ una sucesión de variables de Bernoulli independientes y simétricas y sea $X_n = (\xi_n + \xi_{n+1})/2$. Halle las probabilidades de transición $P_{i,j}^{(m,n)} = P(X_n = j | X_m = i)$ para $m < n$, $i, j = -1, 0, 1$. Demuestre que (X_n) no es una cadena de Markov.

8. Sea $X_n,\ n \geq 1$ una cadena de Markov y sea τ el primer instante para el cual $X_n \neq X_0$, con $\tau = +\infty$ si $X_n = X_0$ para todo $n \geq 0$. Calcule $\mathrm{E}(\tau | X_0 = i)$ en términos de P_{ii}.

9. Considere un sistema de inventario en tiempo discreto donde X_n indica el número de objetos en el sistema al inicio del período n. Al inicio de cada período, el inventario decrece una unidad si el nivel de inventario es positivo. En caso contrario el inventario permanece a nivel 0 hasta el fin del período. Al final del n-ésimo período se surte el inventario una cantidad V_n, donde las V_n son v.a.i.i.d. con distribución $p_i = P(V_1 = i),\ i \geq 0$. Bajo estas hipótesis $X_{n+1} = (X_n - 1 + V_n)$ si $X_n > 0$ y $X_{n+1} = V_n$ si $X_n = 0$. Justifique que X_n es una cadena de Markov y halle su matriz de transición.

10. De nuevo, considere un sistema de inventario en tiempo discreto donde X_n indica el número de objetos en el sistema al inicio del período n. En cada período se surte una unidad al inventario y éste decrece U_n unidades, si es posible. En este caso el inventario al inicio del período $n+1$ es $X_{n+1} = (X_n - U_n + 1)^+$. Suponga que las variables U_n son i.i.d. con distribución $p_i = P(U_1 = i)$, $i \geq 0$. Justifique que X_n es una cadena de Markov y halle su matriz de transición.

11. Definimos el instante de la k-ésima visita al estado j por

$$T_j^k = \text{mín}\{n > T_j^{k-1} : X_n = j\}$$

para $k \geq 1$ y ponemos $T_j^0 = 0$. Con esta definición T_j^1 coincide con T_j, como fue definido en clases. Demuestre que para $k \geq 1$, $P_i(T_j^k < \infty) = \rho_{ij}\rho_{jj}^{k-1}$.

12. Con las definiciones vistas en clase, demuestre que

$$P_{ij}^n = \sum_{m=1}^{n} P_i(T_j = m) P_{jj}^{n-m},$$

para $n \geq 1$. Demuestre que si a es un estado absorbente, $P_{ia}^n = P_i(T_a \leq n)$, para $n \geq 1$.

13. a) Demuestre que $\rho_{ij} > 0$ si y sólo si $P_{ij}^n > 0$ para algún entero positivo n.

    b) Demuestre que si $P_{ij} = 0$ siempre que $i \in C$, $j \notin C$, entonces C es cerrado.

14. Decimos que una v. a. T es un *tiempo de parada* para el proceso $(X_n)_{n\geq 1}$ si, para cada n, es posible determinar si el suceso $\{T = n\}$ ocurrió o no observando los valores del proceso hasta el tiempo n: $X_0, X_1, \dots, X_n$.

    Sea i un estado cualquiera de la cadena. Demuestre que T_i, el instante de la primera visita a i, es un tiempo de parada pero τ_i, el instante de la última visita a i, no lo es.

15. Sea T un tiempo de parada para la cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$. Demuestre la siguiente propiedad (que es una versión de la Propiedad Fuerte de Markov)

$$P(X_{T+1} = j | X_k = i_k \text{ para } 0 \leq k < T, X_T = i) = P(X_{T+1} = j | X_T = i).$$