Modelos Estocásticos I

Problemas 3

Los problemas 1, 5 y 12 son para entregar el martes 24/08/10

1. a) Si X es una variable discreta con valores en el conjunto $0, 1, 2, \dots$ demuestre que $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$.

   b) Si X es una variable continua no-negativa con densidad $f(x)$ y f.d. F, demuestre que
$$\mathrm{E}[X] = \int_0^{\infty} [1 - F(t)\, dt.$$

2. Si $X \sim B(n, p)$ halle mediante un cálculo directo usando al función de probabilidad, el valor de $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

3. Si X tiene distribución geométrica de parámetro p, calcule $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

4. Demuestre la siguiente generalización de la desigualdad de Chebyshev. Sea $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ creciente y suponga que $\mathrm{E}[\phi(|X|)] = M < \infty$. Demuestre que $P(|X| \geq c) \leq M/\phi(c)$.

5. **Teorema de Aproximación de Poisson** Sea S_n el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito p_n. Sabemos que $S_n \sim Bin(n, p_n)$. Suponga que $n \to \infty$ y que $p_n \to 0$ de modo que $np_n = \lambda > 0$. Demuestre que la distribución de S_n tiende a una distribución de Poisson de parámetro λ.

6. Sea X una variable aleatoria continua con densidad f. Demuestre que si existe el momento de orden n, entonces también existe el momento de orden p para todo $1 \leq p < n$. (Recuerde que el momento de orden p existe si y sólo si la integral $\int x^p f(x)\, dx$ converge absolutamente). Demuestre el mismo resultado para el caso discreto.

7. De ejemplos de variables aleatorias que satisfagan las siguientes propiedades

   a) $\mathrm{E}(X)$ no existe.

   b) $\mathrm{E}(X)$ existe pero $\mathrm{Var}(X)$ no existe.

   c) $\mathrm{E}(X^p)$ existe para $p = 1, 2, \dots k$ pero no para $p > k$.

8. Sean X, Y dos variables aleatorias con f.d. $F_{XY}(x, y)$ Demuestre que estas variables son independientes si y sólo si para cualquier par de intervalos $(a, b]$ y $(c, d]$ de números reales se cumple que
$$P(X \in (a, b], Y \in (c, d]) = P(X \in (a, b])P(Y \in (c, d]).$$

9. Sean X, Y v.a.i. cada una con distribución uniforme sobre el conjunto de los dígitos $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Consideramos el producto de estas dos variable y escribimos $XY = 10\beta + \alpha$ donde α y β también toman valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

   a) Haga una tabla para la distribución conjunta del vector (α, β).

   b) ¿Cuál es el valor más probable (la *moda*) para el vector (α, β)?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que XY sea el cuadrado de un entero?

   d) Demuestre que las variables α y β no son independientes.

   e) Halle las distribuciones marginales de α y β, sus valores esperados y las varianzas correspondientes.

   f) Calcule $\mathrm{E}(\alpha\beta)$, $\mathrm{Cov}(\alpha, \beta)$ y $\rho(\alpha, \beta)$.

10. **Método de Monte Carlo** Este ejercicio es una introducción al método de Monte Carlo para el cálculo numérico de integrales definidas. El objetivo es estimar la integral
$$I = \int_0^1 x^2\, dx.$$

    a) Dibuja un gráfico de la función $y = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$ y dibuja también un cuadrado de lado 1 con vértices en $(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)$. Usando un generador de números aleatorio en una computadora o una tabla de números aleatorios, obtén un valor de x al azar en el intervalo $(0, 1)$ y un valor de y, también en $(0, 1)$. De esta manera has escogido al azar un punto (x, y) en el cuadrado unitario.

b) Repite el proceso de seleccionar un número al azar en el cuadrado unitario $n = 100$ veces y cuenta en número N de puntos que caen debajo de la curva $y = x^2$.

c) Usa N/n para estimar la integral I. Repite el proceso para $n = 1,000; 10,000$ y compara tus resultados con el valor de la integral I

d) Explica el papel de la distribución binomial en este problema.

e) Usa el método de Monte Carlo para estimar la longitud de arco de la función $y = \sin x$ para $0 \leq x \leq \pi$. (Observación: escribe la longitud de arco como una integral definida. La fórmula para la longitud de arco la puedes encontrar en algún libro de Cálculo. Esta integral no se puede calcular directamente).

11. Sea $X_1 \sim Bin(n_1, p)$, $X_2 \sim Bin(n_2, p)$ y estas variables son independientes. Demuestre que $X_1 + X_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)$. Extienda el resultado anterior al caso de k variables.

12. Sea $X_1 \sim Pois(\lambda_1)$, $X_2 \sim Pois(\lambda_2)$ y estas variables son independientes. Demuestre que $X_1+X_2 \sim Pois(\lambda_1+\lambda_2)$. Extienda el resultado anterior al caso de n variables.

13. Sean x, y v.a.i. con función de distribución común F. Halle la f.d. G de la variable $Z = X + Y$.

14. Una fábrica produce tornillos que se agrupan en lotes cada uno de los cuales es revisado por un inspector antes de ser despachados. El inspector revisa 15 tornillos y verifica si satisfacen o no las especificaciones. El número de objetos defectuosos es 3 o más el lote es rechazado. En otro caso se acepta.

    a) Suponga que la proporción de defectuosos es p y sea A el evento que el lote sea aceptado. Demuestre que $P(A) = (1 - p)^{13}(1 + 13p + 91p^2)$.

    b) Haga la gráfica de $P(A)$ como función de p. Esta curva se conoce como la característica operativa o curva característica del proceso de revisión.

    c) Estime el valor de p para el cual $P(A) = 0.95$. Este valor se conoce como el nivel aceptable de calidad, porque representa la calidad de un lote que con alta probabilidad (0.95) pasaría una prueba de calidad.

    Considere ahora el siguiente plan alternativo de inspección. Se revisan 15 tornillo de cada lote. Si el número de defectuosos es 3 o más se rechaza el lote. Si este número es 0, el lote es aceptado. Si hay uno o dos tornillos defectuosos, se toma un segundo lote de cinco tornillos. Si el total de objetos defectuosos en las dos muestras es 2 o menos, el lote es aceptado y en caso contrario se rechaza.

    d) Demuestre que para este nuevo plan de inspección, $P(A) = (1 - p)^{15} + 15p(1 - p)^{19} + 180p^2(1 - p)^{18}$.

    e) Haga la gráfica de la curva característica para este proceso de revisión y compárela con la del proceso anterior.

    d) Estime el nivel aceptable de calidad para este proceso y compárelo con el anterior.

15. Considere dos variables aleatorias X e Y con distribución conjunta discreta definida por la siguiente tabla para la función de probabilidad conjunta, donde $h = 1/60$.

		X_1		
		0	1	2
	0	h	$2h$	$3h$
X_2	1	$2h$	$4h$	$6h$
	2	$3h$	$6h$	$9h$
	3	$4h$	$8h$	$12h$

    Calcule

    a. $P(X \leq 1,\ Y \leq 1)$ b. $P(X + Y \leq 1)$ c. $P(X + Y > 2)$ d. $P(X < 2Y)$

    e. $P(X > 1)$ f. $P(X = Y)$ g. $P(X \geq Y|Y > 1)$ h. $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$