Modelos Estocásticos I

Problemas 13

Los problemas 2, 6, 8 y 11 son para entregar el martes 2/11/10

1. Halle la distribución estacionaria para una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 \\ .2 & .4 & .4 \\ 0 & .3 & .7 \end{pmatrix}$$

Verifique que la distribución que halló satisface la condición $\pi P = \pi$.

2. Halle la distribución estacionaria para una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 & 0 \\ 0 & .7 & .3 & 0 \\ .1 & 0 & .4 & .5 \\ .5 & 0 & 0 & .5 \end{pmatrix}$$

Verifique que la distribución que halló satisface la condición $\pi P = \pi$.

3. Halle la distribución estacionaria para las cadenas de Markov con las siguientes matrices de transición:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Considere una cadena de Markov con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que esta cadena tiene infinitas distribuciones estacionarias.

5. Considere una cadena de Markov con función de transición P que satisface $P_{ij} = \alpha_j$ para todo $i, j \in \mathcal{S}$, donde las α_j son constantes. Demuestre que la cadena tiene una única distribución estacionaria π dada por $\pi(j) = \alpha_j$, $j \in \mathcal{S}$.

6. Una partícula se mueve de acuerdo a una cadena de Markov sobre $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, c+d\}$. Si está en cualquiera de los primeros c estados, la partícula salta en un paso a un estado que se selecciona uniformemente entre los últimos d estados. Si, en cambio, se encuentra en cualquiera de los últimos d estados, pasa en una transición a alguno de los primeros c estados, seleccionado de manera uniforme. Halle la distribución estacionaria.

7. Halle la distribución estacionaria para una cadena de Ehrenfest.

8. Sea π la distribución estacionaria de una cadena de Markov. a) Demuestre que si $\pi(i) > 0$ y $i \to j$ entonces $\pi(j) > 0$ también.

   b) Demuestre que si j y k son dos estados de na cadena de Markov para los cuales se cumple que $P_{ij} = cP_{ik}$ para todo $i \in \mathcal{S}$, entonces $\pi(j) = c\pi(k)$.

9. Considere una cadena de Markov con probabilidades de transición dadas por

$$P_{i0} = \frac{i+1}{i+2}, \quad P_{ii+1} = \frac{1}{i+2},$$

¿Es recurrente positiva esta cadena? Si lo es, halle su distribución asintótica.

¿Qué sucede para la cadena con probabilidades de transición

$$P_{i0} = \frac{1}{i+2}, \quad P_{ii+1} = \frac{i+1}{i+2} \ ?$$

10. Sean π_0 y π_1 dos distribuciones estacionarias distintas para una cadena de Markov.

    a) Demuestre que para $0 \leq \alpha \leq 1$, la función π_α definida por

    $$\pi_\alpha(i) = (1-\alpha)\pi_0(i) + \alpha\pi_1(i), \quad i \in \mathcal{S},$$

    es una distribución estacionaria.

    b) Demuestre que los distintos valores de α producen distintas distribuciones estacionarias.

11. Considere una cadena de Markov con probabilidades de transición

    $$P_{ii+1} = p, \quad P_{i0} = 1-p,$$

    para $i \geq 0$. Halle la distribución estacionaria.

12. Suponga que la matriz de transición P es doblemente estocástica:

    $$\sum_i P_{ij} = \sum_j P_{ij} = 1.$$

    Demuestre que si la cadena es infinita e irreducible entonces no puede ser recurrente positiva.