Modelos Estocásticos I

Problemas 11

Los problemas 3, 5, 7 y 10 son para entregar el martes 19/10/10

1. Halle el tiempo promedio para llegar al estado 3 partiendo del estado 0 para una cadena de Markov con matriz de transición
$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Se lanza una moneda repetidamente hasta obtener dos águilas seguidas. Halle el número promedio de lanzamientos.

3. Se lanza una moneda repetidamente hasta obtener dos águilas o dos soles. Suponga que el resultado del primer lanzamiento es un águila. Halle la probabilidad de que la serie termine con el lanzamiento de dos soles.

4. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 3.

   b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

5. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Comenzando en el estado 1, determine el tiempo promedio que el proceso pasa en el estado 1 antes de la absorción y el tiempo promedio que pasa en el estado 2 antes de la absorción. Verifique que la suma de estas cantidades es igual al tiempo promedio hasta la absorción.

6. En promedio, ¿qué requiere menos lanzamientos, lanzar una moneda hasta obtener por primera vez el patrón AAS, es decir, hasta observar dos águilas seguidas de un sol, o lanzar una moneda hasta obtener ASA? ¿Puedes explicar por qué son diferentes?

7. Una cadena de Markov se mueve de la siguiente manera: Si en el instante n está en el estado m, en el siguiente instante su posición se distribuye uniformemente en los estados $0, 1, \ldots, m-1$. Halle el valor esperado del tiempo transcurrido hasta que la cadena llegue a 0 por primera vez si comienza en m.

8. Una cadena de Markov se mueve de la siguiente manera: Si en el instante n está en la posición j, en el instante $n+1$ su posición es 0 con probabilidad $1/j$, y su posición es k con probabilidad $2k/j^2$, para $k = 1, 2, \ldots, j-1$. Halle el valor esperado del tiempo transcurrido hasta que la cadena llegue a 0 por primera vez si comienza en m.

9. Considere una cadena de Markov cuya matriz de transición está dada por
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

   Si la cadena comienza en 1, determine la probabilidad de que el proceso nunca visite el estado 2.

10. Un jugador dispone de un capital de 2 pesos y necesita incrementarlo a 10. Puede jugar un juego con las siguientes reglas: se lanza una moneda balanceada, si el jugador apuesta en el lado correcto ganará una suma igual a la suma apostada y el dinero que apostó se le regresará; si no, pierde el dinero apostado. Dado que el jugador está en un apuro, decide usar la siguiente estrategia: a cada paso decide apostar todo su dinero si tiene 5 pesos o menos; en otro caso sólo apuesta lo necesario para incrementar su capital, en caso de ganar, a 10 pesos. Sea $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, el proceso que denota el capital del jugador después de n lanzamientos.

    (a) Justificar que el proceso es una cadena de Markov, determinar su espacio de estados y su matriz de transición.

    (b) Suponga que el capital inicial del jugador es de 2 pesos, pruebe que la probabilidad de que el jugador logre juntar 10 pesos es $1/5$.

    (c) ¿Cuál es el tiempo esperado de la duración del juego? o dicho de otro modo ¿Cuál es el número esperado de lanzamientos necesarios para que el jugador logre alcanzar su objetivo o perder todo su capital?

    Indicación: se puede usar R, S+ o matlab en el cálculo de la solución.

11. Sea $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ una caminata aleatoria simple: $X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$ con $\{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. que toman los valores $\{-1, 1\}$ con probabilidad $1-p$ y $p \in (0,1)$ respectivamente.

    a) ¿Cuales son las clases de comunicación de esta cadena de Markov? ¿Hay clases que no sean cerradas?

    b) Dar un criterio en términos de p para determinar cuando el estado 0 es recurrente. (Ayuda: Justifique que el número de pasos necesarios para regresar a 0 es par. Recuerde la *formula de Stirling*: $n! \sim \sqrt{(2\pi)}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, para n suficientemente grande).

    c) Establecer un criterio en términos de p para determinar cuando un estado $j \in \mathbb{Z}$ es recurrente.

12. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, \ldots, 5\}$ y con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

    Determine cuáles estados son transitorios y cuáles recurrentes. Calcule $P(T_{\{0,1\}} < \infty | X_0 = x)$, para $x \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.

13. Una caja contiene cinco bolas rojas y tres negras. Las bolas se seleccionan al azar, una a una, de la caja. Si se escoge una bola roja, se deja fuera de la caja, mientras que las negras se vuelven a colocar dentro. El proceso de selección continua hasta que todas las bolas rojas hayan sido eliminadas de la caja. ¿Cuánto tiempo tarda esto en promedio?

14. Tienes cinco monedas y las lanzas al aire. Las que caen sol se vuelven a lanzar y se continúa así hasta que todas las monedas muestren águila. Sea X el número de monedas en el último lanzamiento. Halle $P(X = 1)$.

15. Una cadena de Markov tiene matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    y comienza en el estado 0. Sabemos que el proceso terminará en el estado 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la última transición ocurra desde el estado 1?

    (Ayuda: Sea $T_2 = \min\{n \geq 0 : X_n = 2\}$ y sea $\eta_i = P(X_{T-1} = 1 | X_0 = i)$ para $i = 0, 1$ Haciendo un razonamiento con la primera transición halle ecuaciones para η_0, η_1 y resuélvalas).