Modelos Estocásticos I

Problemas 10

Los problemas 1, 4, 7 y 8 son para entregar el martes 12/10/10

1. Se propone el siguiente método secuencial para estimar el tamaño de una población finita, por ejemplo, una población de peces en un lago. Se captura un miembro de la población al azar, se etiqueta y se regresa a su medio ambiente. Se captura otro ejemplar al azar, se etiqueta y se regresa. Se repite el procedimiento hasta que se captura un miembro de la población que haya sido capturado anteriormente. Cuando esto ocurre, digamos en el ensayo T, se detiene el proceso. Basado en el valor observado de T queremos estimar el tamaño N de la población.

   Sea X_n el número de miembros de la población sin etiqueta que han sido capturados en sucesión. Entonces $X_n = n$ para $n = 0, 1, \ldots, T-1$ pero $X_T = 0$, de modo que T es el instante de la primera visita a 0: $T = \min\{n \geq 1 : X_n = 0\}$.

   a) Para N fijo, muestre que (X_n) es una cadena de Markov de rachas pero con probabilidades de transición p_n y q_n no estacionarias. Obtenga las probabilidades p_n y q_n.

   b) Calcule $P(T = t | X_0 = 0)$ para $t = 2, \ldots, N$.

2. Una cadena de Markov sobre los estados $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tiene matriz de transición P. Halle las clases de equivalencia de los estados que se comunican y determine cuáles estados son transitorios y cuáles recurrentes.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 2.

   b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

4. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ y matrix de transición

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Comenzando en el estado 1, determine la probabilidad de que la cadena termine en el estado 3.

   b) Determine el tiempo medio hasta la absorción.

5. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ y probabilidad de transición dada por

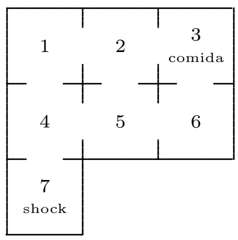
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si comienza en el estado 1, halle la probabilidad de que el proceso termine en el estado 0. Compare esta probabilidad con la entrada $(1, 0)$ en las matrices P^2, P^4, P^8, P^{16}, P^{32}, P^{64}.

6. Una caja contiene cinco bolas rojas y tres negras. Se seleccionan las bolas al azar, una a una. Si se selecciona una bola roja, se deja fuera de la caja. Si, por el contrario, se selecciona una bola negra, se vuelve a colocar en la caja. Este proceso continua hasta que todas las bolas rojas hayan sido sacadas de la caja. ¿Cuál es la duración promedio del proceso?

7. Sea N el número de veces que hace falta lanzar una moneda al aire hasta obtener Sol dos veces consecutivas. Halle una cadena de Markov que sirva de modelo a esta situación. Usando un análisis de la primera transición, halle el valor esperado del número de lanzamientos necesarios para obtener Sol dos veces consecutivas.

8. Se coloca una rata en el compartimiento 4 del laberinto que se muestra en la figura. La rata se mueve por los compartimientos al azar, es decir, si hay k salidas posibles de un compartimiento, la rata escoge entre ellas con probabilidad uniforme $1/k$. ¿Cuál es la probabilidad de que la rata encuentre la comida en el compartimiento 3 antes de sentir el shock eléctrico en el compartimiento 7?



9. Un jugador que juega a la ruleta hace una serie de apuestas de un peso y tiene un capital inicial de \$1.000. Su probabilidad de ganar en cada apuesta es 9/19 y de perder 10/19. El jugador decide dejar de jugar cuando gane un peso (es decir, cuando su capital sea \$1001) o cuando se arruine.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador se arruine?

   b) Halle el valor esperado de la pérdida.

10. Considere un paseo al azar simple y simétrico: $P_{ii+1} = P_{ii-1} = 1/2$ para $0 < i < N$, con estados absorbentes en los extremos: $P_{00} = P_{NN} = 1$. Sea $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ ó } X_n = N\}$, el instante en el cual la cadena entra a un estado absorbente. Calcule $\mathrm{E}_i\, T$, el valor esperado del intervalo de tiempo hasta que la cadena es absorbida si comienza de i. Calcule este valor esperado en los siguientes casos particulares: $N = 25,\ i = 15$; $N = 50,\ i = 30$; $N = 250,\ i = 150$; $N = 2500,\ i = 1500$.

    Obtenga una ecuación para $\mathrm{E}_i\, T$ en el caso asimétrico $P_{ii+1} = p$, $P_{ii-1} = q$, $p + q = 1$, y compruebe que la función
$$\frac{i}{q-p} \frac{N}{q-p} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}$$
    es solución de esta ecuación.