Nombre: ____

1	2	3	4	T

Modelos Estocásticos I

Tercer Examen Parcial

Viernes 3/12/10, 10 a.m. – 2 p.m.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

1. a) ¿Cuál es la diferencia entre un estado recurrente positivo y uno recurrente nulo? ¿Cómo se define el período de un estado? Demuestre que si el estado i es recurrente positivo y $i \to j$ entonces j también es recurrente positivo. Demuestre también que si $i \leftrightarrow j$ entonces ambos estados tienen el mismo período.

   b) Considere una cadena de Markov de nacimiento y muerte sobre $\{0, 1, 2, \dots\}$ con probabilidades de transición

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{i+2}\big) \qquad \text{para } i \geq 0, \\ P_{i,i-1} &= \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{i+2}\big) \qquad \text{para } i \geq 1, \end{aligned}$$

   y $P_{00} = 1 - P_{01} = 3/4$. Determine si la cadena es transitoria, recurrente nula o recurrente positiva. En este último caso, halle la distribución estacionaria.

2. Considere una cadena de Markov que toma valores en $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ y con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Demuestre que la cadena es irreducible.

   b) Calcule el período de la cadena.

   c) Halle la distribución estacionaria.

   d) Describa el comportamiento asintótico de las potencias de la matriz P.

3. Una sustancia radioactiva emite partículas α de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo con intensidad de $\lambda = 3$ por segundo.

   a) Si en los primeros cinco segundos se han emitido 12 partículas, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de ellas fuesen emitidas en el primer segundo?

   b) Las partículas emitidas son registradas por un contador Geiger con probabilidad 3/4. Si al cabo de 3 segundos el contador ha registrado 6 partículas, ¿Cuál es la probabilidad de que en realidad hayan sido emitidas 9?

A esta fuente radioactiva se le une otra que emite partículas α con intensidad de $\mu = 5$ por segundo.

c) ¿Cuál es la distribución del tiempo de espera hasta que se emita la primera partícula?

d) ¿Cuál es la distribución del tiempo de espera hasta que el contador registre la primera partícula?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera partícula detectada por el contador provenga de la segunda fuente radioactiva?

4. a) Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo de parámetro λ y sea τ_k el instante en el cual ocurre el k-ésimo evento. Demuestre que para $0 < t_1 < t_2$,

$$P(\tau_1 > t_1, \tau_2 > t_2) = e^{-\lambda t_2}[1 + \lambda(t_2 - t_1)].$$

b) Derivando esta fórmula halle la densidad conjunta de (τ_1, τ_2).

c) Determine las densidades marginales de τ_1 y τ_2.

d) Determine la densidad condicional para τ_1 dado que $\tau_2 = t_2$.