Maestría en Probabilidad y Estadística
Curso Propedéutico
Problemas 6

Los problemas 11, 17 y 28 son para entregar el jueves 7/08/14

1. Un jugador lanza dos monedas. Si ambas caen águila, gana \$10, si śolo hay un águila, gana \$2, mientras que si no hay ninguń águila pierde \$12. Determine el valor esperado de la ganancia para un lanzamiento de las dos monedas.

2. En una lotería se venden 1,000,000 de boletos de \$10 cada uno. Hay un primer premio de \$3,000,000, 10 premios de \$200,000, 100 premios de \$2,000, 1,000 premios de \$100 y 10,000 boletos reciben un reembolso del costo del boleto. Halle el valor esperado de la ganancia neta por boleto.

3. Extraemos al azar cartas de un juego de barajas con reposición hasta obtener un as y sea X el número de cartas extraídas. Halle $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

4. Lanzamos una moneda repetidamente hasta obtener dos águilas o dos soles, lo que ocurra primero. Sea X el número de lanzamientos de la moneda. Halle el valor esperado y la varianza de X.

5. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ. Halle el valor esperado de la variable $Y = e^X$.

6. Sean X, Y variables aleatorias cada una de las cuales toma únicamente dos valores distintos. Demuestre que X e Y son independientes si y sólo si $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.

7. Lanzamos dos dados, si el lanzamiento es un *doble* (dos caras iguales) los dados se vuelven a lanzar y así hasta que las dos caras que se obtienen sean distintas. Sea X el número de lanzamientos necesarios para que esto ocurra. Halle el valor esperado y la varianza de X. Halle también el valor esperado y la varianza de 2^X

8. En una bolsa hay cinco boletos que corresponden a un premio de \$1,000 y cuatro premios de \$20. Cinco personas sacan, sucesivamente, un boleto al azar y sea X_i el premio que le corresponde a la i-ésima persona en sacar un boleto. Calcule $\mathrm{E}(X_1)$ y $\mathrm{Var}(X_1)$, (b) $\mathrm{E}(X_3)$ y $\mathrm{Var}(X_5)$, (c) $\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_5)$ y $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_5)$.

9. Una caja contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Se extraen 200 bolas con reposición y sea X_i el número en la i-ésima bola extraída, Y la suma de los 200 números obtenidos y Z el promedio de los 200 números. Halle (a) $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$, (b) $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$, (c) $\mathrm{E}(Z)$ y $\mathrm{Var}(Z)$.

10. Lanzamos un par de dados, sea X_1 el número que aparece en el primero y X_2 el del segundo. Definimos $Y = X_1 + X_2$, $Z = XY$. Halle (a) $\mathrm{E}(X_1)$, (b) $\mathrm{E}(X_2^2)$, (c) $\mathrm{E}(Y)$, (d) $\mathrm{E}(Z)$, (e) $\mathrm{E}(YZ)$, (f) $\mathrm{E}(Y^2)$, (g) $\mathrm{E}(Z^2)$.

11. En un concurso hay cinco cajas idénticas cerradas. En una de ellas hay \$100,000, otra contiene \$10,000, una tercera \$1,000, la cuarta \$100 y la última tiene un signo de ALTO. El concursante escoge una caja y gana el contenido. Este proceso se repite hasta que salga el signo de ALTO, momento en el cual el concurso termina. Halle el valor esperado de la cantidad que gana el concursante.

12. Una máquina produce objetos que son defectuosos con probabilidad 0,01 y cuando esto ocurre, la máquina se detiene y es ajustada. Halle el valor promedio del número de objetos buenos producidos entre dos objetos defectuosos.

13. Calcule media y varianza para las distribuciones de los ejercicios 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 18 y 19 del Capítulo 4.

14. Sea X una variable aleatoria con $\mathrm{E}(X) = 2,\ \mathrm{Var}(X) = 1,\ \mathrm{E}(X^4) = 34$. Calcular media y varianza para las siguientes variables aleatorias: $U = 2X + 1,\ V = X^2,\ Z = -X^2 + 2$.

15. Las variables X, Y son independientes y $\mathrm{E}(X) = -3,\ \mathrm{E}(X^4) = 100,\ \mathrm{E}(Y) = 4,\ \mathrm{E}(Y^4) = 500,\ \mathrm{Var}(X) = 0{,}5,\ \mathrm{Var}(Y) = 2$. Calcular la media y varianza para las variables $U = 3X - 2Y$ y $V = X^2 - Y^2$.

16. Suponga que X, Y tienen igual media e igual varianza y además son independientes. Demuestre que
$$\mathrm{E}((X - Y)^2) = 2\,\mathrm{Var}(X).$$

17. Suponga que X, Y tienen igual varianza. Demuestre que $\mathrm{E}((X + Y)(X - Y)) = \mathrm{E}(X + Y)\,\mathrm{E}(X - Y)$. ¿Es cierto que $X + Y$ y $X - Y$ son independientes?

18. Suponga que X, Y son independientes y ambas tienen media 3 y varianza 1. Halle la media y varianza de $X + Y$ y XY.

19. Demuestre que
$$\operatorname{Var}(X+Y)+\operatorname{Var}(X-Y)=2\operatorname{Var}(X)+2\operatorname{Var}(Y).$$

20. Sea X una variable con valor esperado finito $\mathrm{E}(X)$. Demuestre que $(\mathrm{E}\,X)^2 \le \mathrm{E}(X^2)$

21. Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2. Definimos la media muestral por $\overline{X}=n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$. Demuestre que
$$\operatorname{Cov}(\overline{X},X_k-\overline{X})=0,\quad 1\le k\le n.$$

22. Sea X,Y variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Halle media y varianza de la variable $Z=\max(X,Y)$. (Ayuda: si x,y son números reales demuestre que $2\max(x,y)=|x-y|+x+y$).

23. Sea X una variable con distribución $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Halle media y varianza de $|X-c|$ cuando (a) c es una constante dada, (b) $\sigma=\mu=c=1$, (c) $\sigma=\mu=1, c=2$.

24. En las notas vimos que de acuerdo a la ley de Maxwell, la velocidad v de una molécula de gas de masa m a temperatura absoluta T es una variable aleatoria con densidad
$$f_v(x)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\alpha^3}x^2e^{-x^2/k^2}$$
para $x>0$ con $\alpha=(2kT/m)^{1/2}$ y k es la constante de Boltzman. Halle media y varianza de (a) la velocidad v de la molécula, (b) la energía cinética $E=mv^2/2$ de la molécula.

25. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Calcular $\mathrm{E}(Y)$ cuando (a) $Y=\operatorname{sen}X$. (b) $Y=\cos X$ (c) $Y=3X^2+2$ (d) $Y=1/|X|^\alpha$ En el último caso, ¿para cuáles valores de α se tiene que $\mathrm{E}(Y)<\infty$?

26. Calcular la esperanza y la varianza de las distribuciones cuyas densidades se indican a continuación:
$$(a)\ f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } 0<x<1,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}\qquad (b)\ f(x)=\begin{cases}|x| & \text{si } x<1,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

27. Sea X una variable con distribución exponencial. (a) Halle $P(\operatorname{sen}X>1/2)$, (b) $\mathrm{E}(X^n)$ para $n\ge 1$.

28. Se considera el siguiente juego de azar entre dos jugadores. El primero elige un punto X al azar en el intervalo $(0,2)$ mientras que el segundo elige un punto Y en el intervalo $(1,3)$, también con distribución uniforme. Suponemos que X e Y son variables aleatorias independientes. Entonces

    – Si $X<Y$, el primer jugador paga $a(Y-X)$ unidades al segundo.

    – Si $X\ge Y$, el segundo jugador paga $b(X-Y)$ unidades al primero,

    donde a y b son constantes positivas.

    a. Hallar la relación b/a para que el juego sea equitativo (esto significa que la esperanza matemática de la ganancia de cada jugador es igual a cero).

    b. Con la relación b/a calculada en la parte anterior, calcular la varianza de la ganancia del primer jugador.

29. Sean X,Y variables aleatorias independientes, ambas con distribución de Bernoulli con probabilidad de éxito $1/2$. Demuestre que $X+Y$ y $|X+Y|$ son dependientes pero no están correlacionadas.

30. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p y M un número entero positivo. Calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria $Y=\min\{X,M\}$.

31. (a) Se lanza una moneda balanceada repetidamente. Sea ν la variable aleatoria que indica el número de veces seguidas que ocurre lo mismo que en el primer lanzamiento. (Por ejemplo, si A es águila y S es sol, con la sucesión de resultados $AAASSAS\dots$ se tiene $\nu=3$ mientras que con la sucesión $SSSSSASAS\dots$ se tiene $\nu=5$). Calcular $\mathrm{E}(\nu)$ y $\operatorname{Var}(\nu)$.

    (b) Rehacer el cálculo de la parte (a) suponiendo que, en lugar de una moneda perfecta, se dispone de una moneda tal que la probabilidad de águila en un lanzamiento es igual a p. ¿Qué ocurre si $p=0$ ó $p=1$?