# Maestría en Probabilidad y Estadística
# Curso Propedéutico
### Problemas 5

Los problemas 4 y 14 son para entregar el lunes 4/08/14

1. Dada la función de probabilidad conjunta definida por

$$r_{ij} = C(i + j)$$

en los puntos $(1,1)$; $(2,1)$; $(2,1)$ y $(3,1)$, donde $C$ es una constante, determine en valor de $C$ y obtenga la función de probabilidad marginal correspondiente a la primera variable.

2. Considere un grupo de cartas que consiste de $J$, $Q$, $K$ y $A$ de las cuatro pintas. Se extraen dos cartas del grupo sin reposición y llamamos $X$ e $Y$ al número de diamantes y corazones obtenidos, respectivamente. Obtenga la función de probabilidad conjunta y la función marginal correspondiente a $X$.

3. Una caja tiene 6 bolas numeradas del 1 al 6. Las bolas numeradas 1 y 2 son rojas mientras que las otras son blancas. Extraemos dos bolas al azar de la caja y sean $X, Y$ las variables aleatorias que representan el número de bolas rojas y el número de bolas pares en la muestra, respectivamente. Halle la distribuciones de $X$ e $Y$ y su distribución conjunta. Determine si estas variables son independientes.

4. Una caja contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Las primeras cuatro son rojas y las otras blancas. Seleccionamos dos bolas al azar de la caja y definimos las siguientes variables: $X$ es el número de bolas blancas en la muestra, $Y$ es el número de bolas pares y $Z$ el número de bolas en la muestra cuyo número es menor que 6. Halle la distribución conjunta de las variables $(X, Y)$; $(X, Z)$; $(Y, Z)$ y $(X, Y, Z)$. Estudie la independencia de estas variables.

5. Considere dos variables aleatorias $X$ e $Y$ con distribución conjunta discreta definida por la siguiente tabla para la función de probabilidad conjunta, donde $h = 1/60$.

| | | $X_1$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | $h$ | $2h$ | $3h$ |
| $X_2$ | 1 | $2h$ | $4h$ | $6h$ |
| | 2 | $3h$ | $6h$ | $9h$ |
| | 3 | $4h$ | $8h$ | $12h$ |

Calcule a) $P(X \leq 1,\ Y \leq 1)$ b) $P(X + Y \leq 1)$ c) $P(X + Y > 2)$ d) $P(X < 2Y)$
e) $P(X > 1)$ f) $P(X = Y)$ g) $P(X \geq Y | Y > 1)$ h) $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$

6. Repita el ejercicio anterior para la siguiente función de probabilidad conjunta (de nuevo $h = 1/60$).

| | | $X_1$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 |
| | 0 | $h$ | $6h$ | $6h$ |
| $X_2$ | 1 | $2h$ | $8h$ | $9h$ |
| | 2 | $3h$ | $2h$ | $12h$ |
| | 3 | $4h$ | $4h$ | $3h$ |

7. Lanzamos un dado dos veces. Sea $X$ el resultado del primer lanzamiento, $Y$ el mayor de los resultados de los dos lanzamientos. Halle la distribución conjunta y las distribuciones marginales de estas variables. Determine si son independientes.

8. Lanzamos una moneda tres veces y definimos las siguientes variables aleatorias: $X$ es el número de águilas, $Y$ es la longitud de la mayor sucesión de águilas en la muestra. Por ejemplo $Y(A, S, A) = 1$, $Y(A, A, S) = 2$. Halle la distribución conjunta, las distribuciones marginales y determine si estas variables son independientes.

9. Lanzamos una moneda cuatro veces y definimos las siguientes variables aleatorias: $X$ vale 1 si hay más águilas que soles y vale 0 si esto no es cierto. Por otro lado, $Y$ representa la longitud de la mayor sucesión de águlas en la muestra. Hallar la distribución conjunta y las marginales. Determine si estas variables son independientes.

10. Consideremos un experimento que tiene resultados $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$ con probabilidades correspondientes 0,1; 0,1; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1. Sea $X, Y$ y $Z$ las variables aleatorias definidas por la siguiente tabla

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\omega_2$ | 2 | 2 | 2 |
| $\omega_3$ | 1 | 3 | 3 |
| $\omega_4$ | 2 | 1 | 4 |
| $\omega_5$ | 1 | 2 | 1 |
| $\omega_6$ | 2 | 3 | 2 |
| $\omega_7$ | 1 | 1 | 3 |
| $\omega_8$ | 2 | 2 | 4 |

Halle las distribuciones de probabilidad de $X, Y$ y $Z$ y las distribuciones conjuntas de $(X, Y)$; $(X, Z)$; $(Y, Z)$ y $(X, Y, Z)$.

11. Considere dos eventos $A$ y $B$ tales que $P(A) = 1/4,\ P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Definimos las variables $X$ e $Y$ por $X = \mathbf{1}_A,\ Y = \mathbf{1}_B$, donde $\mathbf{1}_E(x)$ vale 1 si $x \in E$ y vale 0 si $x \notin E$. Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas.

   a. Las variables aleatorias $X$ e $Y$ son independientes.

   b. $P(X^2 + Y^2 = 1) = 1/4$.

   c. $P(XY = X^2Y^2) = 1$.

   d. La variable aleatoria $X$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

   e. Las variables $X$ e $Y$ tienen la misma distribución.

12. Considere las variables aleatorias $X$ e $Y$ con densidad conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Calcule

| | |
|---|---|
| a. $P(X \leq 1,\ Y \leq 1)$ | b. $P(X + Y \leq 1)$ |
| c. $P(X + Y > 2)$ | d. $P(X < 2Y)$ |
| e. $P(X > 1)$ | f. $P(X = Y)$ |
| g. $P(Y > 1,\ X \leq 1)$ | h. $P(X \geq Y \mid Y > 1)$ |

13. Repita el ejercicio anterior para la densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp(-(x + y)) & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

14. Sean $X$ e $Y$ variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0, 1]$. Calcule

   a) $P(X + Y < 0,5)$ b) $P(X - Y < 0,5)$ c) $P(XY < 0,5)$ d) $P(X/Y < 0,5)$

   e) $P(X^2 < 0,5)$ f) $P(X^2 + Y^2 < 0,5)$ g) $P(e^{-X} < 0,5)$ h) $P(\cos \pi Y < 0,5)$.

15. Dada la densidad $f(x, y) = 8xy,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$, calcule

$$P(X < 0,5,\ Y < 0,5), \qquad P(X < 0,5), \qquad P(Y < 0,5).$$

A partir de estos cálculos, ¿qué se puede decir sobre la independencia de $X$ e $Y$?

16. Dada la densidad $f(x, y) = xy\ e^{-(x+y)},\ x > 0,\ y > 0$, calcule $P(X > 1,\ Y > 1)$. ¿Son independientes estas variables aleatorias?