Maestría en Probabilidad y Estadística
Curso Propedéutico
Problemas 4

Los problemas 14 y 16 son para entregar el viernes 1/08/14

1. Verifique que las siguientes funciones son densidades y obtenga la función de distribución correspondiente.

   a. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{para } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{para } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$

2. Sea X una variable aleatoria con valores en $[0,1]$ y función de distribución $F(x) = x^2$. ¿Cuál es la densidad de X? Calcule las siguientes probabilidades:

   a. $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$, b. $P(X > 1/2)$, c. $P(X \leq 3/4 | X > 1/2)$.

3. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de parámetros $\mu = 12$, $\sigma^2 = 9$. Use `R` para calcular

   a. $P(X > 3)$. b. $P(|X - 12| < 4)$. c. $P(|X - 10| > 2)$.

4. Determine el valor que debe tomar la constante A en cada caso para que las siguientes funciones sean densidad de una función de distribución.

   a. $f(x) = Ae^{-\alpha|x-\theta|},\ -\infty < x < \infty,\ \alpha$ y θ constantes.
   b. $f(x) = Ax^{\alpha+1},\ x > x_0 > 0,\ \alpha$ constante.
   c. $f(x) = Ax(1-x),\ 0 \leq x \leq 1$.
   d. $f(x) = \frac{A}{1+x^2},\ -\infty < x < \infty$.

5. Sea $f(x) = Cxe^{-x},\ x > 0$ una densidad.

   a. Determine el valor de C. b. Calcule $P(X < 2)$. c. Calcule $P(2 < X < 3)$.

6. Halle la función de distribución F y su gráfica si la densidad es

   a. $f(x) = 1/2,\ 0 \leq x \leq 2$. b. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

7. Si $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2},\ x > 0$, halle un número x_0 tal que $P(X > x_0) = 1/2$.

8. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0{,}5$. Calcule

   a. $P(X > 1)$, b. $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$, c. $P(X > 2 | X > 1)$.

9. La vida de una máquina, medida en horas, tiene densidad $f(x) = C/x^2,\ x > 100$.

   a. Calcule C. b. Halle la función de distribución. c. Calcule $P(X > 500)$.

10. La temperatura T de cierto objeto, medida en grados Fahrenheit, tiene una distribución normal con parámetros $\mu = 98{,}6$ y $\sigma^2 = 2$. La temperatura θ medida en grados centígrados está relacionada con T por la fórmula

$$\theta = \frac{5}{9}(T - 32).$$

    Obtenga la distribución de θ.

11. La magnitud v de la velocidad de una molécula con masa m en un gas de temperatura absoluta T es una variable aleatoria que, de acuerdo a la teoría cinética de los gases, posee una distribución de Maxwell con parámetro $\alpha = (2kT/m)^{1/2}$, donde k es la constante de Boltzman. La distribución de Maxwell de parámetro α tiene densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} x^2 \exp\left(\frac{x^2}{k^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

    ¿Cuál es la densidad de la energía cinética $E = mv^2/2$ de una molécula?

12. Halle la densidad de $Y = e^X$ donde X tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2. (Se dice que la variable Y tiene distribución lognormal con parámetros μ y σ^2).

13. Sea X una v.a. continua con densidad f. Demuestre que para cualquier valor x de X se tiene que $P(X = x) = 0$.

14. Sea F una función de distribución. Demuestre que F tiene, a lo sumo, una cantidad numerable de discontinuidades. Si F es continua demuestre que F es uniformemente continua.

15. Sea F la función de distribución dada por

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$$

y sea P la probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

a) $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ c) $C = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ d) $D = [0, 2)$ e) $E = (3, \infty)$.

16. Sea F la función dada por

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\mathbf{1}_{[\frac{1}{i},\infty)}.$$

Demuestre que F es una función de distribución en $\mathbb{R}$. Sea P la medida de probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos

a) $A = [1, \infty)$ b) $B = (\frac{1}{10}, \infty)$ c) $C = \{0\}$ d) $D = [0, \frac{1}{2})$ e) $E = (-\infty, 0)$ f) $F = (0, \infty)$.

17. Escriba un programa de computación que tenga como entradas n, p, j y si $X \sim b(n, p)$ calcule el valor de $P(X = j)$ y la aproximación de Poisson para este valor.

18. Escriba un programa de computación para simular n valores de una variable de Bernoulli con $p = 1/3$. Corra el programa para $n = 100;\ 1000;\ 10000$ y en cada caso determine la proporción de los valores que son iguales a 1.

19. Escriba un programa de computación que tenga como entrada la función de probabilidad $p_i, i = 1, \dots n$ y como resultado produzca un valor de la variable con esta función de probabilidad y valores en $\{1, 2, \dots, n\}$.

20. Considere la distribución binomial negativa con parámetros p y k. Verifique la relación

$$P(X = j + 1) = \frac{j(1-p)}{j+1-k}P(X = j).$$

Use esta relación para dar un nuevo algoritmo para generar esta distribución.

21. Dé un método para generar una variable aleatoria tal que

$$P(X = i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i/i!}{\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\lambda^i/i!}, \qquad i = 0, \dots, k.$$

22. Dé un método para generar una variable aleatoria con distribución triangular.

23. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{e^x}{e-1}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

24. Dé un método para generar una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & \text{si } 2 \le x \le 3, \\ \frac{2-x/3}{2}, & \text{si } 3 \le x \le 6. \end{cases}$$

25. Use el método de la transformada inversa para generar una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \frac{x^2 + x}{2}, \qquad 0 \le x \le 1.$$