Maestría en Probabilidad y Estadística
Curso Propedéutico
Problemas 2

Los problemas 11 y 16 son para entregar el miércoles 30/07/14

1. Sea A, B y C eventos con probabilidad estrictamente positiva. Demuestre las siguientes relaciones:
   a) $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(B)P(A|B)$ b) $P(A \cap B|B \cup C) = P(A \cap B|B)P(B|B \cup C)$
   c) $P(B \cap C|A) = P(C|A)P(B|A \cap C)$ si $P(A \cap C) \neq 0$ d) $P(A|B)P(B|C)P(C|A) = P(B|A)P(C|B)P(A|C)$
   e) $\frac{P(A|A\cup B)}{P(B|A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

2. Demuestre: $\frac{P(B^c|A)}{P(B)} + \frac{P(A^c)}{P(A)} = \frac{P(A^c|B)}{P(A)} + \frac{P(B^c)}{P(B)}$.

3. Un detector de mentiras muestra una señal positiva (indicando una mentira) 10 % de las veces que el sujeto dice la verdad y 94 % de las veces que miente. Si dos personas son sospechosas de un crimen que se sabe ha cometido uno solo de ellos, y ambos dicen ser inocentes, ¿cuál es la probabilidad de que una señal positiva del detector corresponda al culpable?

4. Se obtiene una muestra de cuatro bolas a partir de una bolsa que contiene doce, de las cuales ocho son blancas. Si el muestreo es sin reposición, halle la probabilidad de que la tercera bola sea blanca, si sabemos que la muestra tiene tres bolas blancas. ¿Que sucede si el muestreo se hace con reposición?

5. Se lanza un par de dados simétricos. Calcule la probabilidad de que la suma sea 7 dado que:
   a. La suma es impar, b. La suma es mayor que 6,
   c. El resultado del primer dado fue impar, d. El resultado del segundo dado fue par,
   e. El resultado de al menos un dado fue impar, f. Los dos dados tuvieron el mismo resultado,
   g. Los dos dados tuvieron distintos resultados, h. La suma de los dos dados fue 13.

6. Una caja contiene 10 focos, cuatro malos y seis buenos. Los focos se prueban de la siguiente manera: se extraen al azar y se prueban sin reemplazarlos. Este proceso se repite hasta localizar los cuatro en mal estado. ¿Cuál es la probabilidad de que el último en mal estado se identifique en la quinta prueba? ¿y en la décima?

7. Cierta vacuna brinda protección parcial contra una enfermedad, de modo que una persona vacunada tiene probabilidad 0.4 de contraer la enfermedad, mientras que para una persona no vacunada esta probabilidad es de 0.8. Si 75 % de la población está vacunada, ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que tiene la enfermedad haya sido vacunada?

8. Luego de una serie de pruebas para evaluar un nuevo tipo de examen para detectar cáncer, se ha determinado que 97 % de los pacientes cancerosos de un hospital reaccionan positivamente, mientras que sólo 5 % de aquellos que no tienen cáncer muestran un resultado positivo. Si 2 % de los pacientes del hospital tienen cáncer, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar que reacciona positivamente al examen realmente tenga cáncer?

9. Suponga que 5 % de los hombres y 25 de cada 10.000 mujeres son daltónicos. Se escoge un daltónico al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

10. Una ferretería tiene tres cajas con igual cantidad de tornillos. Dos de las cajas contienen 5 % de tornillos defectuosos y la otra contiene 10 %. Se escogen dos cajas al azar y se mezclan y de ella se extraen cinco tornillos, uno de los cuales es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que una de las cajas usadas en la mezcla haya sido la que contenía 10 % de defectuosos?

11. Tres sucursales de una tienda tienen 8, 12, y 14 empleados de los cuales 4, 7 y 10 son mujeres, respectivamente.

    a. Se escoge una sucursal al azar y de ella se escoge un empleado. Si éste es una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que ella trabaje en la sucursal con 12 empleados?

    b. Si se escoge un segundo empleado de la misma sucursal, ¿cuál es la probabilidad de que se escoja una mujer?

12. Se extrae una bola de una caja que contiene cuatro blancas y dos negras. Si la bola es blanca se deja fuera de la bolsa, mientras que si es negra se vuelve a colocar dentro. Extraemos luego otra bola. Sea A el evento "la primera bola es blanca" y $B =$ "la segunda bola es blanca". Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas:
    a. $P(A) = 2/3$ b. $P(B) = 3/5$ c. $P(B|A) = 3/5$
    d. $P(A|B) = 9/4$ e. Los eventos A y B son disjuntos.

13. Lanzamos una moneda tres veces y consideramos los siguientes eventos: A: el primer lanzamiento es águila, B: el segundo lanzamiento es sol, C: el tercer lanzamiento es águila, D: los tres lanzamientos son iguales, E: hay exactamente un águila en los tres lanzamientos. ¿Cuáles de los siguientes grupos de eventos son independientes?

    (i) A, B (ii) A, D (iii) A, E (iv) D, E. (v) A, B, C (vi) A, B, D (vii) C, D, E.

14. Sean A y B dos eventos disjuntos. Demuestre que si A y B son independientes, alguno de los dos tiene probabilidad 0.

15. Sea A, B y C eventos independientes y $P(C) \neq 0$. Demuestre:

    a. $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$. b. $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.

    c. $P(A|B \cap B) = P(A)$ siempre que $P(B \cap C) \neq 0$.

16. Sean $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5, 6\}$ Lanzamos dos dados y sean los eventos A : 'el primer dado cae en H, B :'El segundo dado cae en H, C : un dado cae en G y el otro en H, D : el total es cuatro, E : el total es cinco y F : el total es siete. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

    a. A y F son independientes.
    b. A y D son independientes.
    c. A y E son independientes.
    d. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
    e. A y C son independientes.
    f. C y E son independientes.
    g. $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$.
    h. A, C y E son independientes.

17. a. De un ejemplo de tres eventos A, B y C tales que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ pero $P(A^c \cap B^c \cap C^c) \neq P(A^c)P(B^c)P(C^c)$.

    b. Demuestre que si $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$; $P(A^c \cap B \cap C) = P(A^c)P(B)P(C)$; $P(A \cap B^c \cap C) = P(A)P(B^c)P(C)$ y $P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(B)P(C^c)$ entonces A, B y C son independientes.

18. Demuestre que si

$$\frac{P(A)}{P(A \cap B)} + \frac{P(B)}{P(A \cap B)} = \frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(B)},$$

    entonces A y B son independientes.

19. Sea $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ y $P(a) = P(b) = 1/8$, $P(c) = P(d) = P(e) = 3/16$. Sean $A = \{a, d, e\}$, $B = \{a, c, e\}$ y $C = \{a, c, d\}$. Demuestre que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ pero ningún par de eventos son independientes.

20. Si $A_1, \ldots, A_n$ son eventos independientes, muestre que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n)).$$

21. a. Si sabemos que una mano de poker tiene al menos tres aces ¿cuál es la probabilidad de que tenga los cuatro? b. Si sabemos que una mano de poker tiene los aces de corazón, trébol y diamante ¿cuál es la probabilidad de que también tenga el as de pica? c. Halle la probabilidad de que una mano de poker tenga los dos aces negros dado que tiene al menos tres aces.

22. Una muestra de tamaño 4 se extrae con reposición de una bolsa que contiene 6 bolas, de las cuales 4 son blancas. Sea A el evento "exactamente una de las dos primeras bolas extraídas es blanca" y sea B = "la cuarta bola es blanca". ¿Son A y B independientes? ¿Qué sucede si el muestreo se realiza sin reposición?

23. Considere de nuevo el ejercicio anterior y definamos C como el evento "exactamente dos de las bolas extraídas son blancas" ¿Son A, B y C independientes? ¿Son B y C independientes?

24. Sean A y B eventos independientes tales que con probabilidad 1/6 ocurren simultáneamente, y con probabilidad 1/3 ninguno de ellos ocurre. Halle $P(A)$ y $P(B)$. ¿Están determinadas de forma única estas probabilidades?

25. Los eventos $A_1, A_2, \ldots$ son independientes y $P(A_j) = p$, $j = 1, 2, \ldots$ Halle el menor valor de n para el cual $P(\cup_1^n A_k) \geq p_0$ donde p_0 es un número fijo.

26. Supongamos que A y B son independientes, y B y C son independientes.

    a. ¿Son A y C independientes en general?

    b. ¿Es B independiente de $A \cup C$?

    c. ¿Es B independiente de $A \cap C$?