Maestría en Probabilidad y Estadística
Curso Propedéutico
Problemas 1

Los problemas 9 y 13 son para entregar el martes 29/07/14

1. a) Sea $\{A_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de conjuntos. Definimos el límite superior de la sucesión por

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

y el límite inferior por

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Si

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$$

decimos que la sucesión A_n converge y que su límite es el valor común de estos límites.

Demuestre que el límite superior es el conjunto de los puntos que pertenecen a infinitos conjuntos A_n, mientras que el límite inferior es el conjunto de los puntos que pertenecen a todos los conjuntos A_k a partir de un cierto índice (que puede depender del punto).

b) Sea $\{A_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de conjuntos. Decimos que la sucesión es *creciente* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_n \subset A_{n+1}$. La sucesión es *decreciente* si para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$. En cualquiera de estos dos casos decimos que la sucesión es monótona.

Demuestre que para una sucesión creciente

$$\limsup_n A_n = \bigcup_n A_n$$

mientras que si la sucesión es decreciente,

$$\liminf_n A_n = \bigcap_n A_n.$$

c) Demuestre que una medida de probabilidad es continua para sucesiones monótonas, es decir, si $\{A_n,\, n \geq 1\}$ es una sucesión monótona,

$$P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n).$$

2. a) Sea Ω un conjunto cualquiera y $\mathcal{P}(\Omega)$ la colección de todos los subconjuntos de Ω. Demuestre que $\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra.

b) Demuestre que la intersección de (cualquier cantidad de) σ-álgebras es también una σ-álgebra.

c) Usando los incisos anteriores demuestre que dada cualquier colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, existe una mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, que denotamos por $\sigma(\mathcal{C})$ (Mínima quiere decir que si $\mathcal{A}$ es cualquier σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$ entonces también contiene a $\sigma(\mathcal{C})$).

3. Demuestre que una σ-álgebra es cerrada bajo intersecciones numerables, diferencias y diferencias simétricas ($A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

4. Sean A_1, A_2 y A_3 eventos de un espacio muestral. Expresar mediante uniones, intersecciones y complementos los siguientes eventos:

a. Los tres eventos ocurren.
b. Ocurre sólo A_1.
c. Ocurren A_1 y A_2, pero no A_3.
d. Ocurre al menos uno de los tres eventos.
e. No ocurre ninguno.
f. Ocurren al menos dos.
g. Ocurren dos y no más.

5. Sean A, B y C tres eventos. Demuestre las siguientes propiedades:
   a. $P(A \cap B) + P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) + P(A^c \cap B^c) = 1$.
   b. $P(A^c \cap B^c) + P(A) + P(A^c \cap B) = 1$.
   c. $P(A^c \cap B^c \cap C^c) + P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C) = 1$.
   d. $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c)$.
6. Demuestre que si $A \cap B \cap C = \emptyset$, entonces
$$P((A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)) = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A).$$
7. Demuestre que
   a. $\text{mín}\{1, P(A) + P(B)\} \geq P(A \cup B) \geq \text{máx}\{P(A), P(B)\}$
   b. $\text{mín}\{P(A), P(B)\} \geq P(A \cap B) \geq \text{máx}\{0, P(A) + P(B) - 1\}$
   c. $P(\cap_1^n A_i) \geq \sum_1^n P(A_i) - (n-1)$.
8. Describa en detalle un espacio muestral para los siguientes experimentos: (a) Tres lanzamientos de un dado. (b) Calificaciones de una clase de 20 estudiantes en un examen. (c) Medición de la temperatura a mediodía en una estación meteorológica. (d) Medición de las velocidades de carros pasando por un punto dado. (e) Una sucesión infinita de lanzamientos de una moneda.
9. Una caja contiene n bolas rojas y n bolas blancas. Se extraen dos bolas al azar. ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento? ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan colores distintos. Halle la probabilidad p_n de que las bolas sean del mismo color y evalúe $\text{lím}_{n\to\infty} p_n$.
10. Se lanzan al aire simultáneamente tres monedas balanceadas. Calcular:
    a. La probabilidad de obtener 3 caras.
    b. La probabilidad de obtener por lo menos 2 caras.
11. Se realiza un test de conocimientos con 11 preguntas a contestar por *sí* o *no*. Se da por aprobada la prueba si se contestan correctamente al menos 6 de las 11 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen contestando al azar?
12. Para comenzar un cierto juego es necesario lanzar un 6 con un dado.
    a) ¿Cuál es la probabilidad de lanzar el primer 6 en el tercer intento?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de necesitar más de tres intentos?
    c) ¿Cuántos lanzamientos hacen falta para que la probabilidad de haber lanzado un 6 sea al menos 0.95?
    d. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 ocurra en un número par de lanzamientos?
13. Sean: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ la familia de conjuntos de Borel y P la probabilidad definida en el ejemplo 6 de la sección 2.4.
    a. Probar que $P(\{\omega\}) = 0$, donde $\{\omega\}$ es el subconjunto de Ω que consta sólo del punto ω. (Verificar previamente que $\{\omega\} \in \mathcal{B}$).
    b. Sean $Q = \{\omega : \omega \in [0,1] \text{ es racional}\}$ e $I = \{\omega : \omega \in [0,1] \text{ es irracional}\}$. Probar que $P(Q) = 0$ y $P(I) = 1$.
14. Se lanzan cuatro dados y se multiplican los números que se obtienen. ¿Cuál es la probabilidad de que este producto sea divisible por 5? ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito en el producto sea 5?