Probabilidad Avanzada I
Problemas 8

Los problemas 2, 6, 17, 21 y 28 son para entregar el miércoles 23/05/18.

1. Sean X, Y v.a. con varianza finita, g una función a valores reales tal que $\mathrm{E}(g(X))^2 < \infty$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra. Definimos $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G}]$. Demuestre que $\mathrm{E}(Y - g(X))^2 = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(Y|\mathcal{G})] + \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|\mathcal{G}) - g(X))^2 \geq \mathrm{E}[\mathrm{Var}(Y|\mathcal{G})]$, y se obtiene una igualdad para $g(X) = \mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$. Demuestre también que $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(Y|\mathcal{G})] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$.

2. Sean X, Y v.a.i. y sea f una función medible tal que $f(X,Y)$ es integrable. Definimos $g(x) = \mathrm{E}(f(x,Y))$ si $\mathrm{E}\,|(f(x,Y))| < \infty$ y $g(x) = 0$ en caso contrario. Demuestre que g es medible en $\mathbb{R}$ y que $\mathrm{E}(f(X,Y)|X) = g(X)$.

3. En clase vimos que si $\mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ y llamamos $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ al subespacio de elementos de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que son $\mathcal{G}$-medibles, la esperanza condicional $\mathrm{E}(X|\mathcal{G})$ es la proyección de X en el subespacio $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Suponga ahora que $\mathcal{G} = \sigma(Z)$ para alguna $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sea S_Z el subespacio de dimensión 1 generado por Z. Demuestre que S_Z puede ser mucho más pequeño que $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ de modo que $\mathrm{E}(X|Z)$ no es la proyección de X sobre Z.

4. (i) Sean $a, b > 0$ y $\{(X_n^{(i)}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ submartingalas para $i = 1, 2$. Demuestre que $\{(aX_n^{(1)} + bX_n^{(2)}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ y $\{(\max\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ son submartingalas.

   (ii) Sean $a, b > 0$ y $\{(X_n^{(i)}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ supermartingalas para $i = 1, 2$. Demuestre que $\{(aX_n^{(1)} + bX_n^{(2)}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ y $\{(\min\{X_n^{(1)}, X_n^{(2)}\}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ son supermartingalas.

   (iii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y suponga que $\{(X_n^{(1)}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una martingala, y que $\{(X_n^{(2)}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una submartingala. Demuestre que $\{(aX_n^{(1)} + bX_n^{(2)}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una submartingala para $b > 0$ y una supermartingala para $b < 0$.

5. (i) Si $\{(X_n, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una martingala, entonces $\{(X_n^+, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$, $\{(X_n^-, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ y $\{(|X_n|, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ son submartingalas.

   (ii) Si $\{(X_n, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una martingala y $\mathrm{E}\,|X_n|^p < \infty$ para todo n y algún $p > 1$, entonces $\{(|X_n|^p, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una submartingala.

   (iii) Si $\{(X_n, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una submartingala, también lo es $\{(X_n^+, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$.

   (iv) Si $\{(X_n, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una submartingala no-negativa y $\mathrm{E}\,|X_n|^p < \infty$ para todo n y algún $p \geq 1$, entonces $\{(|X_n|^p, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una submartingala.

6. Considere el ejemplo 5.10 (doble o nada). Demuestre que la duración esperada del juego es 2, el valor esperado de la cantidad de dinero perdida al momento del primer éxito es infinito y la ganancia total al terminar el juego es 1.

7. Sea T un tiempo de paro. Si $T \equiv n$ demuestre que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$.

8. Demuestre que T es un tiempo de paro si y sólo si $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \geq 0$.

9. Sea T un tiempo de paro, $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ y defina $T(\omega) = T(\omega)$ si $\omega \in \Lambda$ y $T(\omega) = \infty$ en caso contrario. Demuestre que T_Λ es otro tiempo de paro.

10. Demuestre que T es $\mathcal{F}_T$-medible.

11. Sea $\{X_n,\ n \geq 0\}$ una martingala con $X_n \in L^2$ para todo n. Sean S y T tiempos de paro acotados con $S \leq T$. Demuestre que X_S y X_T están ambos en L^2 y demuestre que

$$\mathrm{E}\left[(X_T - X_S)^2|\mathcal{F}_S\right] = \mathrm{E}[X_T^2 - X_S^2|\mathcal{F}_S] \quad \text{y que} \quad \mathrm{E}\left[(X_T - X_S)^2\right] = \mathrm{E}[X_T^2 - X_S^2]$$

12. Sea g una función convexa y sea $\{X_n,\ n \geq 0\}$ una martingala. Demuestre que $n \to \mathrm{E}[g(X_n)]$ es una función no-decreciente. (Ayuda: Use la desigualdad de Jensen).

13. Sea X_n una sucesión de v.a. con $\mathrm{E}(X_n) < \infty$ y $\mathrm{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$ para todo $n \geq 1$. Suponga además que $X_n \in \mathcal{F}_n$ para todo $n \geq 0$. Sea $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$. Demuestre que $\{(S_n, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una martingala.

14. Sea $\{X_n,\ n \geq 0\}$ una submartingala con descomposición de Doob $X_n = M_n + A_n$ Demuestre que $\mathrm{E}(A_n) < \infty$ para todo $n \geq 0$.

15. Sea $\{X_n,\ n \geq 0\}$ una martingala con $X_0 = 0$ y suponga que $\mathrm{E}(X_n^2) < \infty$ para todo n. Demuestre que $Y_n = X_n^2$ es una submartingala y sea $Y_n = L_n + A_n$ su descomposición de Doob. Demuestre que $\mathrm{E}(X_n^2) = \mathrm{E}(A_n)$. Demuestre también que $A_n - A_{n-1} = \mathrm{E}[(X_n - X_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}]$.

16. Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una sucesión creciente de v.a. integrables y suponga que $X_n \in \mathcal{F}_n$ para todo n. Demuestre que X_n es una submartingala.

17. Sea $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de tiempos de paro. Demuestre que $\sum_k \tau_k$, $\min_k\{\tau_k\}$ y $\max_k\{\tau_k\}$ son tiempos de paro

18. Sea $\{(X_n, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ una martingala predecible. Demuestre que $X_n = X_0$ c.s.

19. Sean S y T tiempos de paro. Demuestre que αT para $\alpha \geq 1$, α entero, es un tiempo de paro. Demuestre que $\{S < T\}$, $\{S \leq T\}$, $\{S = T\}$ están todos en $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. ¿Es $T - S$ un tiempo de paro?

20. Sea $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de tiempos de paro. Demuestre que $\tau_n \downarrow \tau$ entonces τ es un tiempo de paro. De manera similar, si $\tau_n \uparrow \tau$ entonces τ es un tiempo de paro.

21. Una caja contiene n bolas negras y r rojas. Se selecciona una bola al azar y se repone en la caja junto con c bolas del mismo color. Sea $X_0 = n/(n+r)$ y sea X_n la proporción de bolas negras en la etapa n, es decir, justo después de la n-ésima extracción y reposición. Demuestre que $\{X_n\}$ es una martingala. Demuestre que X_n converge c.s. y en L^p para $p \geq 1$.

22. Sea $Y_n \in L^2$ y suponga que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n^2) = 0$. Sea $\{\mathcal{F}_n,\ n \geq 1\}$ una filtración y sea $X_k^n = \mathrm{E}(Y_n | \mathcal{F}_k)$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\sup_k (X_k^n)^2) = 0$.

23. Sea X e Y v.a. no-negativas que satisfacen $\alpha P(X \geq \alpha) \leq \mathrm{E}(Y \mathbf{1}_{\{X \geq \alpha\}})$, para todo $\alpha > 0$. Demuestre que $\mathrm{E}(X^p) \leq \mathrm{E}(qX^{p-1}Y)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$.

24. Sea X e Y como en el ejercicio anterior y suponga que $||X||_p < \infty$, $||Y||_p < \infty$. Demuestre que $||X||_p \leq q||Y||_p$.

25. Demuestre el resultado del ejercicio anterior sin suponer que $||X||_p < \infty$.

26. Use el ejercicio 24 para demostrar el teorema 4.22.

27. Sean X_n v.a.i. y sea $\mathcal{A}_\infty$ la σ-álgebra cola asociada. Sea $A \in \mathcal{A}_\infty$. Demuestre que $\mathrm{E}(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n) = P(A)$, para todo n, donde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_j;\ 0 \leq j \leq n)$. Demuestre además que $\mathrm{E}(\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n) = \mathbf{1}_A$ c.s. y deduzca que $P(A) = 0$ ó 1.

28. Una martingala $X = \{X_n,\ n \geq 1\}$ está acotada en L^2 si $\sup_n \mathrm{E}(X_n^2) < \infty$. Sea X una martingala con $X_n \in L^2$ para cada n. Demuestre que X está acotada en L^2 si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[(X_n - X_{n-1})^2] < \infty$.

29. Sea X una martingala acotada en L^2. Demuestre que $\sup_n \mathrm{E}(|X_n|) < \infty$ y concluya que $\lim_n X_n = Y$ con $\mathrm{E}(|Y|) < \infty$.

30. Sea $\{X_n,\ n \geq 1\}$ i.i.d. con $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2$. Sea $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n$ converge c.s. si $\sum_{n\geq 1} \alpha_n^2 < \infty$.

31. Sea $\{(X_n, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ una (sub)martingala y sea τ un tiempo de paro. Demuestre que $\{(X_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ es una (sub)martingala.

32. Demuestre la siguiente extensión del teorema deconvergencia de martingalas (b): Sea $p \geq 1$. Si $\mathrm{E}\,|Z|^p < \infty$, $\{\mathcal{F}_n\}$ es una filtración y $X_n = \mathrm{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ entonces $\{(X_n, \mathcal{F}_n),\ n \geq 0\}$ una martingala uniformemente integrable.

33. Sea $Y_1, Y_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con distribución común $(Y_i = \frac{1}{2}) = P(Y_i = \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$ y sea $X_n = Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_n$, $n \geq 1$. Demuestre que Y_n es una martingala que converge c.s. a 0.

34. Demuestre que X_n y $V_n = \frac{X_n(N-X_n)}{(1-N^{-1})^n}$ para $n \geq 0$ son martingalas si $\{X_n,\ n \geq 0\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, \ldots, N\}$ y probabilidades de transición

$$p_{ij} = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

35. Si τ es un tiempo de paro respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n,\ n \geq 0\}$, demuestre que una v.a. Y es $\mathcal{F}_\tau$-medible ssi $Y \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} \in \mathcal{F}_n$, para $n \in \mathbb{N}$.

36. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], m)$ donde m es la medida de Lebesgue. Sea $\mathcal{B}_n = \sigma([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}),\ 0 \leq k < 2^n)$. Sea f una función integrable en $[0,1)$. (a) Verifique que la esperanza condicional $\mathrm{E}(f|\mathcal{B}_n)$ es una función escalera que converge en L^1 a f. Use este resultado para demostrar el siguiente lema de aproximación: Si $\varepsilon > 0$ existe una función continua g definida en $[0,1)$ tal que

$$\int_{[0,1)} |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

(b) Suponga ahora que f es de Lipschitz, es decir que para alguna $K > 0$ $|f(t) - f(s)| \leq K|t-s|, \quad 0 \leq s < t < 1$. Definimos

$$f_n(x) = \frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} \mathbf{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})}(x), \quad x \in [0,1).$$

Demuestre que $\{(f_n, \mathcal{B}_n),\ n \geq 0\}$ es una martingala, que existe f_∞ tal que $f_n \to f_\infty$ c.s. y en L^1, y

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f_\infty(s)\, ds, \quad 0 \leq a < b < 1.$$

37. Si $\{X_n\}$ es una martingala y es acotada por arriba o por debajo, entonces es acotada en L^1.

38. Sea (Y_n) v.a. con $\mathrm{E}\,|Y_n| < \infty$. Suponga que para $n \geq 0$ $\mathrm{E}(Y_{n+1}|Y_0, \dots, Y_n) = a_n + b_n Y_n$, con $b_n \neq 0$. Sean

$$l_{n+1}(z) = a_n + b_n z, \qquad l_{n+1}^{\leftarrow}(y) = \frac{y - a_n}{b_n}$$

y definimos $L_n(y) = l_1^{\leftarrow}(l_2^{\leftarrow}(\dots(l_n^{\leftarrow}(y)\dots))$, la composición de las primeras n funciones inversas. Demuestre que para todo k, $\{(X_n = kL_n(Y_n), \sigma(Y_0, \dots, Y_n)),\ n \geq 0\}$ es una martingala. Como casos especiales se tiene (a) el esquema de Polya (Prob. 21), (b) el proceso de ramificación simple y (c) Sea $Y_0 \sim \mathcal{U}[0,1]$. Dado Y_n la variable Y_{n+1} tiene distribución uniforme en $[Y_n, 1]$. Entonces $X_n = 2^n(1 - Y_n)$ es una martingala.

39. Sea $\{Z_0 = 1, Z_1, Z_2, \dots\}$ un proceso de ramificación con inmigración. Este proceso satisface $Z_{n+1} = Z_1^{(1)} + \dots + Z_n^{(Z_n)} + I_{n+1}$ donde las $\{Z_n^{(i)},\ i \geq 1\}$ son v.a.i.i.d. con valores enteros no-negativos con distribución $\{p_j\}$ e independientes de Z_n. Además $\{I_j,\ j \geq 1\}$ representan la inmigración, son i.i.d. con distribución q concentrada en los enteros no-negativos, e I_{n+1} es independiente de Z_n para todo n. Supongamos que $\mathrm{E}(Z_1) = m > 1$ y $\mathrm{E}(I_1) = \lambda > 0$. (a) Halle $\mathrm{E}(Z_{n+1}|Z_n)$. (b) Use un argumento de martingalas para demostrar que Z_n/m^n converge c.s. a una v.a. finita.

40. Sea τ un tiempo de paro respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_n,\ n \geq 1\}$ en el espacio $\Omega, \mathcal{F}, P)$. Para cualquier n sea $\phi(n)$ en menor entero p tal que $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_p$. Demuestre que $\phi(\tau)$ es un tiempo de paro acotado por τ.