Probabilidad Avanzada I
Lista de Problemas 7

Los problemas 3, 4, 8, 19 y 28 son para entregar el miércoles 09/05/18.

1. Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a. i. con distribución uniforme $\mathcal{U}(-1,1)$ para $n \geq 1$. Sea m_k una sucesión creciente de enteros positivos y sea $S_n = \sum_{k=1}^n X_k^{m_k}$ para $n \geq 1$. Demuestre que
$$\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad (n \to \infty) \quad \iff \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} = \infty$$

2. Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a. i. con $P(X_k = k^\alpha) = P(X_k = -k^\alpha) = 1/2, \quad k \geq 1$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que el Teorema Central del Límite vale si y sólo si $\alpha \geq -1/2$.

3. Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a. i. con distribución uniforme $\mathcal{U}(-k^\alpha, k^\alpha)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine la distribución límite (cuando exista) de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ con una normalización adecuada, cuando $n \to \infty$.

4. Extensión del TCL de Lyapunov: Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a. i. con media 0 y sea g una función no-negativa tal que $g(x)/x^2 \uparrow +\infty$ cuando $x \to \infty$ y tal que $\mathrm{E}(g(X_n)) < \infty$ para todo n. Finalmente sean $S_n = X_1 + \dots + X_n$ y $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \operatorname{Var}(X_k)$ para $n \geq 1$. Demuestre que si, para todo $\varepsilon > 0$,
$$\frac{1}{g(\varepsilon s_n)} \sum_{k=1}^n \mathrm{E}(g(X_k)) \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$
entonces
$$\frac{1}{s_n} S_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{cuando } n \to \infty.$$
Demuestre que este resultado es realmente una extensión del teorema de Lyapunov.

5. Suponga que para cualesquiera $a > 0, a' > 0, b \in \mathbb{R}, b' \in \mathbb{R}$ existen $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ tales que para la f.d. F se tiene que $F(ax+b) * F(a'x+b') = F(\alpha x + \beta)$. Demuestre que F es estable.

6. Suponga que X es estrictamente estable con índice $\alpha \in (0,2)$, Y es no-negativa y estable con índice $\beta \in (0,1)$. Demuestre que $XY^{1/\alpha}$ es estable con índice $\alpha\beta$.

7. Sea X una v.a. estable con índice $\alpha \in (0,2)$ y sea Y una v.a. de Bernoulli simétrica e independiente de X. Demuestre que XY es estrictamente estable.

8. Demuestre que la distribución de Poisson es infinitamente divisible pero no estable.

9. Sea G una medida finita y sea
$$\varphi(t) = \exp\left\{ i\mu t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x) \right\} \tag{1}$$
donde el integrando vale $-t^2/2$ en 0. Demuestre que φ es la función característica de una distribución infinitamente divisible.

10. Demuestre que la distribución de Cauchy (con f.c. $e^{-|t|}$) corresponde a la fórmula (1) con $\mu = 0$ y G una medida con densidad $1/\pi(1+x^2)$ respecto de la medida de Lebesgue.

11. Sea X una v.a. con distribución geométrica de parámetro p ($P(X = k) = q^{k-1}p$ para $k \geq 1$). Halle la función característica de esta distribución y demuestre que es infinitamente divisible.

12. Demuestre que la distribución uniforme $\mathcal{U}(-1,1)$ no es infinitamente divisible.

13. Si $\lambda \geq 0$ y φ es una función característica, demuestre que $\exp\{\lambda(\varphi - 1)\}$ es una función característica infinitamente divisible.

14. ¿Es cierto que la combinación convexa de funciones características infinitamente divisibles también es infinitamente divisible?

15. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. independientes de $N \sim Pois(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{N} X_k$ es infinitamente divisible.

16. Sea X una v.a. en $\mathbb{R}^n$ y sea Y una v.a. con valores en $\mathbb{R}$. Demuestre que X es medible respecto a $\sigma(X)$ si y sólo si existe una función Borel-medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $Y = f(X)$.

17. Sea Y una v.a. con varianza finita y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra. Demuestre que $\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}(Y|\mathcal{G}))^2 = \mathrm{E}\, Y^2 - \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})))^2$.

18. Sea $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P))$ y sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Definimos la esperanza condicional de Y dada $\mathcal{G}$ como el único elemento ξ de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P))$ tal que $\mathrm{E}(\xi Z) = E(YZ) \quad \forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

    (i) Demuestre que para variables en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, esta definición coincide con la que dimos en clase. (Observación: La unicidad se refiere a clases de equivalencia en el sentido usual).

    (ii) Usando un argumento de truncación demuestre que la definición puede extenderse a $Y \in L^+(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la clase de variables no-negativas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Demuestre además que si $0 \le Y \le Y'$ entonces $\mathrm{E}(Y|\mathcal{G}) \le \mathrm{E}(Y'|\mathcal{G})$.

    (iii) Extienda la definición a variables $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

19. Demuestre las siguientes proposiciones

    (i) $\mathrm{E}(Y|Y) = Y$ c.s.

    (ii) Si $|X| \le k$ c.s. entonces $|\,\mathrm{E}(X|\mathcal{G})| \le k$ c.s.

    (iii) Si $X \in L^2$ y Y es una v.a. tal que $\mathrm{E}(X|Y) = Y$ c.s. y $\mathrm{E}(Y|X) = X$ c.s. entonces $X = Y$ c.s.

    (iv) Sea $\mathcal{G}_1,\ \mathcal{G}_2$ σ-álgebras de eventos y $X \in L^1$. Si $X_1 = \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)$, $X_2 = \mathrm{E}(X_1|\mathcal{G}_2)$ y $X = X_2$ c.s. entonces $X_1 = X_2$ c.s.

    (v) Si $X, Y \in L^1$ con $\mathrm{E}(X|Y) = Y$ c.s. y $\mathrm{E}(Y|X) = X$ c.s. entonces $X = Y$ c.s.

20. Sea $Y \in L^2(\Omega)$ y suponga que $\mathrm{E}(Y^2|X) = X^2$ y $\mathrm{E}(Y|X) = X$. Demuestre que $Y = X$ c.s.

21. Sean X, Y v.a. con segundos momentos finitos tales que para alguna función decreciente f se tiene $\mathrm{E}(X|Y) = f(Y)$. Demuestre que $\mathrm{Cov}(X, Y) \le 0$.

22. (Cauchy-Schwarz) Para $X, Y \in L^2$ demuestre que $(\mathrm{E}(XY|\mathcal{G}))^2 \le \mathrm{E}(X^2|\mathcal{G})\, \mathrm{E}(Y^2|\mathcal{G})$.

23. Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Suponga que $\mathcal{H}$ es independiente de $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$. Demuestre que $\mathrm{E}(X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = \mathrm{E}(X|\mathcal{G})$.

24. Si $X \in L^1$, $Y \in L^\infty$ y $\mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, demuestre que $\mathrm{E}(Y\, \mathrm{E}(X|\mathcal{G})) = \mathrm{E}(X\, \mathrm{E}(Y|\mathcal{G}))$.

25. Sea $\{N(t),\ t \ge 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad λ. Halle $\mathrm{E}(N(s)|N(t))$ para $0 \le s < t$.

26. Si U tiene distribución $U(0,1)$ en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definimos $Y = U(1-U)$. Si X es una variable positiva, halle $\mathrm{E}(X|Y)$.

27. Para $0 \le X \in L^1$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, demuestre que c.s.

$$\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty P(X > t|\mathcal{G})\, dt$$

28. Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ y X tiene segundo momento finito, demuestre que

$$\mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_2))^2\right) \le \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1))^2\right)$$

    ¿Cómo se interpreta este resultado?

29. Sea Y una v.a. en L^1. Demuestre que $\{\mathrm{E}(Y|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ es una sub-}\sigma\text{-álgebra } \}$ es uniformemente integrable.

30. Sea (X, Y) v.a. centradas con distribución conjunta gaussiana de varianzas σ_1^2 y σ_2^2 y covarianza ρ. Halle $\mathrm{E}(X|Y)$ y $\mathrm{Var}(X|Y)$.

31. Suponga que $X_1,\ X_2$ son variables i.i.d. exponenciales de parámetro 1. Halle

    (i) $\mathrm{E}(X_1|X_1 + X_2)$. (ii) $P(X_1 < 3|X_1 + X_2)$. (iii) $\mathrm{E}(X_1|X_1 \wedge t)$. (iv) $\mathrm{E}(X_1|X_1 \vee t)$.

32. (Desigualdad de Chebyshev) Demuestre que para $X \in L^2$ y $a > 0$, $P(|X| \ge a|\mathcal{G}) \le \frac{1}{a^2}\, \mathrm{E}(X^2|\mathcal{G})$. Generalice el resultado anterior para cualquier potencia k en lugar de 2.