Probabilidad Avanzada I
Problemas 5

Los problemas del 1 al 5 son para entregar el miércoles 11/04/18.

1. Sea X una v.a. con f.c. φ. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes: (i) $|\varphi(t_0)| = 1$ para algún $t_0 \neq 1$. (ii) Existen $a \in \mathbb{R}, h \neq 0$ tales que $P(X \in \{a + jh : j \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Demuestre también que para una variable de este tipo, $|\varphi(2\pi j/h)| = 1$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. En consecuencia $\limsup_{|t|\to\infty} |\varphi(t)| = 1$. Compare con el Lema de Riemann- Lebesgue.

2. Usando la relación de Parseval demuestre que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{1+y^2}\, dy = \frac{\pi}{e}$$
Ayuda: Considere X una variable de Bernoulli simétrica y Y una variable de Cauchy estándar.

3. Demuestre que e^{-t^4}, $1/(1+t^4)$ y $|\cos t|$ no son funciones características.

4. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.i. con distribución exponencial de parámetro 1 y sea $V_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$ y $W_n = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \cdots + \frac{1}{n}X_n$. Demuestre que $V_n \stackrel{d}{=} W_n$.

5. Demuestre que si $\varphi(t) = 1 + o(t^2)$ cuando $t \to 0$ es una f.c. entonces $\varphi \equiv 0$.

6. Sea X una v.a. con distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que su f.c. está dada por
$$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$
Considere el caso particular $a = -b$ y obtenga la f.c.

7. Sea X una v.a. Demuestre que φ_X es real si y sólo si $X \stackrel{d}{=} -X$, es decir, si la distribución de X es simétrica. Si X, Y son i.i.d. demuestre que $X - Y$ tiene distribución simétrica.

8. Decimos que una distribución es estable simétrica si su f.c. tiene la forma $e^{-c|t|^\alpha}$ para $0 < \alpha \leq 2$ y alguna constante positiva c. Demuestre que esta clase es cerrada bajo convoluciones: Si $X_1, \dots, X_n$ son estables simétricas con índice α, entonces $\sum_i^n X_k/n^{1/\alpha}$ también es estable simétrica con índice α.

9. Usando la relación de Parseval demuestre que
$$\int_{-1}^{1} (1 - |y|) \cos y\, dy = 2(1 - \cos 1).$$
Ayuda: Considere X una variable de Bernoulli simétrica y $Y_1 + Y_2$ donde $Y_i \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $i = 1, 2$, son independientes.

10. Usando funciones características calcule media y varianza para las distribuciones binomial, Poisson, uniforme, exponencial, gamma y normal estándar.

11. Sea X una v.a. con f.d. F y f.c. φ. Demuestre que para $h > 0$
$$P(|X| > 2/h) \leq \frac{1}{h} \int_{|t|<h} (1 - \varphi(t))\, dt.$$
Ayuda: Use Fubini en la integral de la derecha.

12. **La función generadora de probabilidad.** Sea X una v.a. con valores enteros. La función generadora de probabilidad (f.g.p.) de X se define como $g_X(t) = \mathrm{E}\, t^X = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n)$ para los valores de t para los cuales la serie converja. Demuestre un teorema de unicidad para la f.g.m. en este contexto.

13. Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.i. con esperanza 0 y terceros momentos finitos. Usando funciones características demuestre que
$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n)^3 = \mathrm{E}\, X_1^3 + \cdots + \mathrm{E}\, X_n^3.$$

14. Demuestre que no es posible hallar v.a.i.i.d. X e Y tales que $X - Y \sim U(-1,1)$.

15. Suponga que los momentos de una v.a. X son constantes: $\mathrm{E}\, X^n = c$ para todo $n \geq 1$. Halle la distribución de X.

16. ¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?

    (i) Si φ es una f.c., También lo es φ^2.

    (ii) Si φ es una f.c. no-negativa, también lo es $\sqrt{\varphi}$.

17. Sea X_n una v.a. con distribución uniforme en $(-n,n)$. Sea φ_n la f.c. de X_n. Demuestre que la sucesión $\varphi_n(t)$ converge para todo t. ¿Existe una v.a. propia y no-degenerada X_0 tal que $X_n \xrightarrow{d} X_0$? Razone su respuesta. ¿Cómo se relaciona este resultado con el teorema de continuidad?

18. Recordemos que la densidad de la distribución de Cauchy es $1/\pi(1+x^2)$ para $x \in \mathbb{R}$ y la de la distribución de Laplace es $e^{-|x|}/2$ para $r \in \mathbb{R}$.

    (i) Si Y_1 y Y_2 son v.a. exponenciales estándar demuestre que su diferencia $Y_1 - Y_2$ tiene distribución de Laplace.

    (ii) Usando el inciso anterior demuestre que la f.c. de la distribución de Laplace es $1/(1+t^2)$.

    (iii) Usando ahora la fórmula de inversión demuestre que la f.c. de la distribución de Cauchy es $e^{-|t|}$.

19. Sean X tal que $P(X=-1) = P(X=1) = 1/2$, $Y \sim U(-1,1)$ y X e Y independientes. Demuestre por un cálculo directo que $X + Y \sim U(-2,2)$ y luego traduzca este resultado a una proposición sobre las funciones características.

20. Sea X una v.a. Si para algún $n \geq 1$ la f.c. tiene derivada finita de orden $2n$ en $t = 0$, entonces $\mathrm{E}\,|X|^{2n} < \infty$ y $\mathrm{E}\, X^{2n} = i^{-2n}\varphi^{(2n)}(0)$.

21. **La función generadora de cumulantes.** La función generadora de cumulantes (f.g.c.) de una v.a. X se define como $\kappa_X(t) = \log \varphi_X(t)$, donde φ_X es la f.c. Demuestre los siguientes resultados:

    (i) Un teorema de unicidad para la f.g.c.

    (ii) Si $X_1, \dots, X_n$ son v.a.i., $\kappa_{S_n}(t) = \sum_{k=1}^n \kappa_{X_k}(t)$, con $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

    (iii) Si $\mathrm{E}\,|X|^n < \infty$ para algún $n \geq 1$,

    $$\kappa_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\aleph_k + o(|t|^n) \quad (t \to \infty).$$

    Los coeficientes $\aleph_k$ se llaman cumulantes o semi-invariantes.

    (iv) Suponiendo que existen, demuestre la siguiente relación entre momentos ($\mu_k = \mathrm{E}\, X^k$) y cumulantes: $\aleph_1 = \mu_1$, $\aleph_2 = \mu_2 - \mu_1^2$ y $\aleph_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$.

22. Sea $\sim \mathcal{N}(0,1)$, demuestre que los cumulantes de X son todos cero salvo el de orden 2, que vale 1.

23. Sean $X_1, X_2, \dots X_n$ v.a.i. con distribuciones $\mathcal{N}(\mu_i, 1)$ y sea $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$. Demuestre que la función característica de Y es

    $$\varphi_Y(t) = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}} \exp\left(\frac{it\theta}{1-2it}\right)$$

    donde $\theta^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2$. La variable Y tiene una distribución ji-cuadrado no-centrada con n grados de libertad y parámetro de no-centralidad θ, $Y \sim \chi^2(n;\theta)$.

24. De un ejemplo de dos variables aleatorias dependientes X, Y tales que $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

25. Sean $F_i, i = 1,2,3$ f.d. en $\mathbb{R}$ y denotemos por $F * G$. De un ejemplo que demuestre que $f_1 * F_2 = F_1 * F_3$ no implica que $F_2 = F_3$. Ayuda: Para F_1 tome una f.d. cuya f.c. tenga soporte acotado.

26. Demuestre que para todo $T > 0$ existen dos f.c. diferentes φ_{1T} y φ_{2T} tales que $\varphi_{1T}(t) = \varphi_{2T}(t)$ para todo $|t| \leq T$. Ayuda: Usar el criterio de Polya (ver el libro de Chung). Construir una f.c. φ_{2T} a partir de $\varphi_{1T}(t) = e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera: para $T > 0$ φ_{2T} es una función par igual a φ_{1T} para $0 \leq t \leq T$, lineal en $[T, T+1]$ y 0 para $t > T$.