Probabilidad Avanzada I
Lista de Problemas 4

Los problemas 3, 8, 13, 14 y 31 son para entregar el miércoles 21/03/18.

1. **Distancia en Variación Total** La distancia en variación total $d_{TV}(X,Y)$ entre dos variables aleatorias X,Y también se puede definir como
$$d_{TV}(X,Y) = \sup_{u:||u||_\infty=1} |\operatorname{E}(u(X)) - \operatorname{E}(u(Y))|$$
donde el supremo se toma sobre todas las funciones medibles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $||u||_\infty = \sup_x |u(x)| = 1$.

   (a) Si X e Y son discretas con funciones de probabilidad p_n y q_n en los puntos x_n, demuestre que
$$d_{TV}(X,Y) = \sum_n |p_n - q_n| = 2 \sup_{A\subset\mathbb{R}} |P(X \in A) - P(Y \in A)|.$$

   (b) Si X e Y son continuas con funciones de densidad f y g, demuestre que
$$d_{TV}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|dx = 2 \sup_{A\subset\mathbb{R}} |P(X \in A) - P(Y \in A)|.$$

   (c) Demuestre que convergencia en esta distancia implica convergencia en distribución, pero el recíproco es falso.

   (d) Demuestre que $P(X \neq Y) \geq \frac{1}{2} d_{TV}(X,Y)$ y que existe un par de variables X', Y' con las mismas distribuciones marginales para las cuales la igualdad en la expresión anterior vale.

   (e) Si X_i, Y_i son v.a.i., demuestre que
$$d_{TV}\Big(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n d_{TV}(X_i, Y_i)$$

2. a) Sea $\{X_n,\ n \geq 0\}$ una sucesión de v.a. a valores enteros positivos. Demuestre que $X_n \xrightarrow{d} X_0$ si y sólo si para todo entero $k \geq 0$, $P(X_n = k) \to P(X_0 = k)$.

   b) Sea $\{A_n,\ n \geq 0\}$ una sucesión de eventos. Demuestre que $\mathbf{1}_{A_n} \xrightarrow{d} \mathbf{1}_{A_0} \quad \Leftrightarrow \quad P(A_n) \to P(A_0)$.

   c) Sea $F_n = \delta_n$ una delta de Dirac en x_n, para $n \geq 0$. Demuestre que $F_n \xrightarrow{d} F_0$ si y sólo si $x_n \to x_0$.

   d) Sea $P(X_n = 1 - 1/n) = 1/2 = P(X_n = 1 + 1/n)$ y suponga que $P(X = 1) = 1$. Demuestre que $X_n \xrightarrow{d} X$ pero la función de probabilidad $p_n(x)$ de X_n no converge.

3. a) Si $u_n(x),\ x \in \mathbb{R}$ son funciones no-decrecientes para cada n y $u_n(x) \to u_0(x)$ con u_0 continua, entonces para cualesquiera $-\infty < a < b < \infty$
$$\sup_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u_0(x)| \to 0.$$
Por lo tanto convergencia de funciones monótonas a un límite continuo implica convergencia uniforme local.

   b) Suponga que $F_n,\ n \geq 0$ son f.d. propias y $F_n \xrightarrow{d} F_0$. Si F_0 es continua demuestre que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)| \to 0.$$
Por ejemplo, en el TCL donde F_0 es la distribución normal, la convergencia siempre es uniforme.

   c) De una demostración sencilla del teorema de Glivenko-Cantelli bajo la hipótesis adicional de que la distribución subyacente es continua.

4. Sea F una f.d. no-degenerada y suponga que para $a > 0,\ b > 0$ y $c, d \in \mathbb{R}$ que para todo x, $F(ax + b) = F(cx + d)$. Demuestre que $a = c$ y $b = d$. Hágalo de dos maneras: (i) Considerando funciones inversas. (ii) Demostrando que es suficiente probar que $F(Ax + B) = F(x)$ para todo x implica $A = 1,\ B = 0$. Si $T(x) = Ax + B$ entonces itere la relación $F(T(X)) = F(x)$ repetidamente.

5. Demuestre el corolario 3.4 de las notas.

6. ¿Puedes dar un ejemplo de una sucesión de variables absolutamente continuas que converjan en distribución a una variable discreta? ¿Puedes hallar una sucesión de v.a. discretas que tengan un límite débil absolutamente continuo?

7. Suponga que $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{P} c$. Demuestre (a) $X_n Y_n \xrightarrow{w} cX$ y (b) Si $c \neq 0$, $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$.

8. Suponga que X_n tiene distribución geométrica de parámetro p_n para $n \geq 1$. Demuestre que a) Si $p_n \to p > 0$ entonces $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{Ge}(p)$ cuando $n \to \infty$ donde $\mathrm{Ge}(p)$ es una distribución geométrica de parámetro p. b) Si $p_n \to 0$ y $np_n \to \lambda > 0$, entonces $X_n/n \xrightarrow{d} \mathrm{Exp}(1/\lambda)$ cuando $n \to \infty$.

9. Demuestre que si $\mathrm{E} \log^+ |X_n| < \infty$ entonces $\{X_n,\ n \geq 1\}$ es tensa.

10. Demuestre que si $X_n \sim \mathcal{U}(-n, n),\ n \geq 1$ entonces $\{X_n,\ n \geq 1\}$ no es tensa.

11. Demuestre que si la sucesión (X_n) es u.i. entonces es tensa.

12. Sea $\{X_n, n \geq 1\}$ una sucesión de v.a. Demuestre que si $\{X_n,\ n \geq N > 1\}$ es tensa, también lo es $\{X_n, n \geq 1\}$.

13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) \geq 0$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$. Demuestre que si $\sup_n \int f\, dF_n < \infty$ entonces (F_n) es tensa.

14. Demuestre que una familia de f.d. $\{F_n,\ n \geq 1\}$ es tensa si y sólo si $F_n(x)$ converge uniformemente en n cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

15. Demuestre que la siguiente definición de convergencia vaga es equivalente a la que dimos en clase. Una sucesión $H_n \in \mathcal{M},\ n \geq 1$ converge vagamente a $H \in \mathcal{M}$ sii existe un subconjunto denso $D \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $a, b \in D$, $a < b$ se tiene que $H_n(a, b] \to H(a, b]$

16. Demuestre que si la condición del ejercicio 15 es cierta entonces existe un subconjunto denso $D' \subset \mathbb{R}$ tal que $F_n(I) \to F(I)$ donde I puede ser cualquiera de los intervalos (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ y $[a, b]$ con $a, b \in D'$.

17. Sea $\{G_n,\ n \geq 0\}$ una sucesión de funciones en $\mathbb{R}$ finitas y nodecrecientes con $G_n \xrightarrow{v} G_0$. Sea $\Delta G_n = G_n(\infty) - G_n(-\infty)$. Demuestre lo siguiente:
   (i) $\limsup_n G_n(-\infty) \leq G_0(-\infty) \leq G_0(\infty) \leq \liminf_n G_n(\infty)$.
   (ii) $\Delta G_0 \leq \liminf_n \Delta G_n$.

18. Con las definiciones del ejercicio 17 sea $\Delta G_n(a) = G_n(-a)$ para $n \geq 0$, $0 < a < \infty$. Si $\Delta G_n < \infty$ para $n \geq 1$ demuestre que
$$\begin{aligned} \lim G_n(\pm\infty) = G_0(\pm\infty) \text{ finito } &\Leftrightarrow \lim_n \Delta G_n = \Delta G_0 < \infty \\ &\Leftrightarrow \sup_{n \geq 1} (\Delta G_n - \Delta G_n(a)) = o(1) \text{ cuando } a \to \infty. \end{aligned}$$

19. Demuestre que $F_n \xrightarrow{d} F$ si y sólo si $\limsup F_n(C) \leq F(C)$ para todo C cerrado y $\liminf F_n(V) \geq F(V)$ para todo V abierto.

20. (**Métrica de Lévy**) Dadas dos funciones de distribución F y G definimos
$$d(F, G) = \inf\{\delta > 0 : F(x - \delta) - \delta \leq G(x) \leq F(x + \delta) + \delta, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$$
   Demuestre que d es una métrica en el espacio de las funciones de distribución y que convergencia respecto a esta métrica equivale a convergencia en distribución.

21. Si X e Y son v.a. con f.d. F y G y $P(|X - Y| \geq \varepsilon) < \varepsilon$, entonces si d es la distancia de Lévy (ver problema anterior), $d(F, G) \leq \varepsilon$.

22. Suponga que $F_n \xrightarrow{d} F_0$ y suponga que cada f.d. tiene una mediana única $m_n,\ n \geq 0$. Demuestre que $m_n \to m_0$. ¿Se puede afirmar lo mismo si las medianas no son únicas?

23. Halle dos sucesiones de medidas de probabilidad $\{\mu_n\}$ y $\{\nu_n\}$ tales que para toda $f \in \mathcal{C}_K$

$$\int f\, d\mu_n - \int f\, d\nu_n \to 0,$$

pero para ningun intervalo finito (a,b) se tiene que $\mu_n(a,b) - \nu_n(a,b) \to 0$ cuando $n \to \infty$. (Ayuda: Sea $\mu_n = \delta_{r_n}$, $\nu_n = \delta_{s_n}$ y escoja (r_n) y (s_n) adecuadamente).

24. Si $F_n \xrightarrow{d} F$ y $F_n(x^{\pm}) \to F(x^{\pm})$ en todos los puntos de discontinuidad de F, entonces F_n converge uniformemente a F en $\mathbb{R}$.

25. Sea D un subconjunto denso de $\mathbb{R}$ y F_0 una función definida en D creciente, continua por la derecha con $\lim_{x\to-\infty} F_0(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F_0(x) = 1$. Demuestre que hay una única f.d. F en $\mathbb{R}$ tal que $F(x) = F_0(x)$ para todo $x \in D$.

26. Suponga que $F_n \xrightarrow{d} F$ donde F es una f.d. y sea B un conjunto de Borel. Demuestre que puede suceder que $F_n(B) = 1$ pero $F(B) < 1$. Demuestre que si B es cerrado entonces si $F_n(B) = 1$ para todo n se tiene que $F(B) = 1$.

27. Si F_n es la f.d. de X_n, $n \geq 0$ donde $P(X_n = -1/n) = 1 - P(X_n = 0) = 1/2$, $n \geq 1$ y $P(X_0 = 0) = 1$ verifique que $F_n \xrightarrow{d} F_0$, $\lim_n F_n(0) \neq F_0(0)$ y $d^*(F_n, F_0) = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \nrightarrow 0$.

28. Sea $\{X_n,\ n \geq 0\}$ una sucesión de v.a. con f.d. $\{F_n,\ n \geq 0\}$ y sea g una función cuyo conjunto de discontinuidades es D. Si $X_n \xrightarrow{d} X_0$ y $F_0(D) = 0$ entonces $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X_0)$. En particular el resultado es cierto para cualquier función continua g.

29. Demuestre que si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ y $H_n \xrightarrow{v} H$ entonces $\int f\, dH_n \to \int f\, dH$ ¿Es esta condición suficiente?

30. Sea $\{F_n,\ n \geq 0\}$ una sucesión de f.d. con medidas de Lebesgue-Stieltjes asociadas $\{\mu_n,\ n \geq 0\}$. Demuestre que $F_n \xrightarrow{d} F_0$ si y sólo si $\mu_n(A) \to \mu_0(A)$ para todo conjunto $A \in \mathcal{B}$ con $\mu(\partial A) = 0$. ($\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ es la frontera del conjunto A).

31. Para $-\infty < a < b < \infty$ considere la clase de las f.d. tales que $F(a) = 0,\ F(b) = 1$. Demuestre que esta clase es secuencialmente compacta.