Probabilidad Avanzada I

Lista de Problemas 1

Los problemas 2, 9, 13, 17 y 24 son para entregar el miércoles 09/02/18.

1. Sea Ω un conjunto no vacío y sea $\mathcal{F}_0$ la colección de los conjuntos tales que A o A^c es finito. Definimos la función P para $E \in \mathcal{F}_0$ por
$$P(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es finito}, \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es finito}. \end{cases}$$
   a) Demuestre que $\mathcal{F}_0$ es un álgebra.
   b) Si Ω es numerablemente infinito, demuestre que P es finitamente aditiva pero no σ-aditiva.
   c) Si Ω no es numerable demuestre que P es σ-aditiva sobre $\mathcal{F}_0$.

2. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra y $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de eventos en $\mathcal{A}$. Definimos los conjuntos
$$\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k, \quad \limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$
Si $\liminf A_n = \limsup A_n = A$ decimos que la sucesión (A_n) converge a A: $A_n \to A$.
a) Sean B y C subconjuntos de Ω. Halle $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ para la siguiente sucesión de conjuntos
$$A_n = \begin{cases} B, & \text{si } n \text{ es par}, \\ C, & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$
b) Demuestre que $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$; $\quad \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$; $\quad$ y $\quad \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.
c) Sean A_n, B_n subconjuntos de Ω, demuestre que $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$
d) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$, ¿es cierto que $A_n \cup B_n \to A \cup B$, $\qquad A_n \cap B_n \to A \cap B$?

3. Sean f_n, f funciones reales sobre Ω. Demuestre que
$$\{\omega : f_n(\omega) \nrightarrow f(\omega)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\omega : |f_n(\omega - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

4. a) Suponga que $\mathcal{A}_n$ son álgebras que satisfacen $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Demuestre que su unión también es un álgebra.
b) Sin embargo, la unión de una colección numerable de σ-álgebras no necesariamente es una σ-álgebra, aún cuando $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{j+1}$. ¿Es cierto que una unión numerable de σ-álgebras es un álgebra? (Ayuda: ponga $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_j$ la clase de todos los subconjuntos de $\{1, \dots, j\}$ y $\mathcal{F}_j = \sigma(\mathcal{C}_j)$. Por otro lado, si $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$ son dos σ-álgebras, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es un álgebra.

5. Sea $(A_n)n \geq 1$ una sucesión de eventos disjuntos dos a dos y P una probabilidad. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

6. Sea $(A_\beta)_{\beta\in B}$ una familia de eventos disjuntos a pares. Demuestre que si $P(A_\beta) > 0$ para todo $\beta \in B$, entonces B debe ser numerable.

7. Suponga que μ es una medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ que es finita para conjuntos acotados y es invariante bajo traslaciones: $\mu(A + x) = \mu(A)$. Demuestre que $\mu(A) = \alpha m(A)$ para algún $\alpha \geq 0$ y m la medida de Lebesgue.

8. Sea X una v.a. con distribución uniforme en $[-1, 1]$. Halle la densidad de $Y = X^k$ para enteros positivos k.

9. Decimos que un punto x pertenece al soporte de la f.d. F si para todo $\varepsilon > 0$ tenemos $F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$. El conjunto de todos estos puntos se conoce como el *soporte* de F. Demuestre que todo punto de salto pertenece al soporte y que todo punto aislado que pertenece al soporte es un punto de salto. De un ejemplo de una f.d. discreta cuyo soporte sea toda la recta.

10. Sea P una medida de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Para cualquier $B \in \mathcal{B}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ demuestre que existe una unión finita de intervalos A tal que $P(A \triangle B) < \varepsilon$. (Ayuda: Defina $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B} : \forall \varepsilon > 0$, existe una unión finita de intervalos A_ε t.q. $P(A_\varepsilon \triangle B) < \varepsilon\}$).

11. Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son semiálgebras de subconjuntos de Ω, demuestre que la clase $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{A_1 \cap A_2 : A_1 \in \mathcal{S}_1,\ A_2 \in \mathcal{S}_2\}$ también es una semiálgebra de subconjuntos de Ω. El álgebra (σ-álgebra) generada por $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ coincide con el álgebra (σ-álgebra) generada por $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

12. Considere un espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$. Decimos que un conjunto de Borel es regular si

$$P(A) = \inf\{P(G) : A \subset G, G \text{ es abierto}\} \quad y \quad P(A) = \sup\{P(C) : C \subset A, C \text{ es cerrado}\}$$

P es *regular* si todos los conjuntos de Borel son regulares. Sea $\mathcal{A}$ la colección de los conjuntos regulares.

a) Demuestre que $\mathbb{R} \in \mathcal{A},\ \varnothing \in \mathcal{A}$.

b) Demuestre que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos y uniones numerables.

c) Sea $\mathcal{C}$ la colección de los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Demuestre que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

d) Demuestre que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, es decir, demuestre la regularidad.

e) Demuestre que para cualquier conjunto de Borel B, $P(B) = \sup\{P(K) : K \subset B, K \text{ compacto}\}$.

13. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ((0,1], \mathcal{B}(0,1], m)$ donde m es la medida de Lebesgue. Definimos las variables aleatorias

$$X_1(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega; \qquad X_2(\omega) = \mathbf{1}_{\{1/2\}}(\omega); \qquad X_3(\omega) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}_1}(\omega),$$

donde $\mathbb{Q}_1$ son los números racionales en $(0,1]$. Observe que $P(X_1 = X_2 = X_3 = 0) = 1$. Describa las σ-álgebras $\sigma(X_i)$, $i = 1, 2, 3$.

14. Sea $\{A_n,\ n \geq 1\}$ una partición numerable de Ω y definimos $\mathcal{F} = \sigma(A_n,\ n \geq 1)$. Demuestre que una función $X : \Omega \to (-\infty, \infty]$ es $\mathcal{F}$-medible si y sólo si X es de la forma

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{B_i},$$

para constantes c_i. (¿Puedes describir la σ-álgebra $\mathcal{F}$?).

15. Demuestre: (a) Si X es una v.a. entonces $\sigma(X)$ está generada por una colección numerable de conjuntos.

(b) Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es cualquier σ-álgebra generada por una colección numerable de conjuntos, entonces $\mathcal{F} = \sigma(X)$ para alguna v.a. X.

16. Suponga que $T : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ una función medible y X una v.a. sobre Ω_1. Demuestre que $X \in \sigma(T)$ si y sólo si existe una v.a. Y en $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ tal que $X(\omega_1) = Y(T(\omega_1)), \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1$.

17. **El Teorema de Egorof.** Sean $X_n,\ X$ v.a. reales definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suponga que para todo $\omega \in \Lambda \in \mathcal{F}$ tenemos $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto Λ_ε tal que $P(\Lambda_\varepsilon) < \varepsilon$ y

$$\sup_{\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_\varepsilon} |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Por lo tanto la convergencia es uniforme fuera de conjuntos pequeños.

Ayuda: (a) Defina

$$B_n^{(k)} = \big[\sup_{i \geq n} |X_i(\omega) - X(\omega)|\big] \cap \Lambda.$$

(b) Demuestre que $B_n^{(k)} \downarrow \varnothing$ cuando $n \to \infty$.

(c) Existe $\{n_k\}$ tal que $P(B_{n_k}^{(k)}) < \varepsilon/2^k$.

(d) Ponemos $B = \cup_k B_{n_k}^{(k)}$ de modo que $P(B) < \varepsilon$.

18. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a. Demuestre que $X_n \to X$ c.s. sii $\sup_{k \geq n} |X_k - X| \to 0$ en probabilidad.

19. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión i.i.d. de variables centradas con varianza finita. Sea $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, demuestre que $\frac{1}{n} S_n$ converge a 0 en L^2 y en probabilidad.

20. Suponga que $X \in L^1$ y A y A_n son eventos.

    a) Muestre que $\int_{\{|X|>n\}} X dP \to 0$.

    b) Muestre que si $P(A_n) \to 0$, entonces $\int_{A_n} X dP \to 0$.
    (Ayuda: Descomponga, para M grande, $\int_{A_n} |X| dP = \int_{A_n \cap \{|X| \leq M\}} |X| dP + \int_{A_n \cap \{|X| > M\}} |X| dP$).

    c) Demuestre que $\int_A |X| dP = 0$ sii $P(A \cap \{|X| > 0\}) = 0$.

    d) Si $X \in L^2$, muestre que $\mathrm{Var}(X) = 0$ implica que $P(X = \mathrm{E}[X]) = 1$ de modo que X es igual a una constante con probabilidad 1.

    e) Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y $A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2$. Definimos la distancia entre conjuntos $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ por $d(A_1, A_2) = P(A_1 \vartriangle A_2)$. Verifique el siguiente resultado: Si $A_n,\ A \in \mathcal{F}$ y $d(A_n, A) \to 0$ entonces
    $$\int_{A_n} X dP \to \int_A X dP$$
    de modo que la función $A \mapsto \int_A X dP$ es continua.

21. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión monótona de v.a. Si $X_n \to X$ en probabilidad entonces $X_n \to X$ c.s.

22. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias con $X_n \to X$ en probabilidad. Suponga que $|X_n(\omega)| \leq C$ para alguna constante $C > 0$ y todo ω. Demuestre que $\mathrm{E}[|X_n - X|] \to 0$ cuando $n \to \infty$. (Ayuda: Demuestre primero que $P(|X| \leq C) = 1$).

23. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a.i.i.d. con f.d. común F que satisface $F(x_0) = 1,\ F(x) < 1$ para $x < x_0$ con $x_0 < \infty$. Sea $M_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$. Demuestre que $M_n \uparrow x_0$ c.s.

24. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias y sea $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

    a) Demuestre que $X_n \to 0$ c.s. implica $S_n/n \to 0$ c.s.

    b) Demuestre que $X_n \to 0$ en L^p implica $S_n/n \to 0$ en L^p.

    c) Demuestre que $X_n \to 0$ en probabilidad no implica $S_n/n \to 0$ en probabilidad. (Ayuda: Trate $X_n = 2^n$ con probabilidad $1/n$ y 0 con probabilidad $1 - 1/n$).

    d) Demuestre que $S_n/n \to 0$ en probabilidad implica que $X_n/n \to 0$ en probabilidad.