Nombre: ____

1	2	3	4	T

Probabilidad Avanzada I

Primer Examen Parcial

Viernes 23/02/18.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

Responda 4 de las siguientes preguntas

1. (a) Sea $(X_n, n \geq i)$ una sucesión de variables aleatorias. ¿Cómo se define la σ-álgebra cola asociada a esta sucesión?

   (b) Sea $(A_n, n \geq 1)$ una sucesión de eventos independientes tales que $\sum_1^\infty P(A_n) = \infty$. Demuestre que $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

2. Sea $(A_n, n \geq 1)$ una sucesión de eventos independientes y suponga que $P(A_n) < 1$ para todo n. Demuestre que
$$P(A_n\ i.v.) = 1 \Leftrightarrow P\big(\cup_{n=1}^\infty A_n\big) = 1.$$
   Dé un ejemplo que demuestre que la condición $P(A_n) < 1$ es necesaria. Puede suponer conocida la siguiente relación, válida para $0 \leq a_n < 1$
$$\sum_1^\infty a_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \prod_1^\infty (1 - a_n) \text{ converge a un número distinto de 0.}$$

3. Sea $(X_n,\ n \geq 1)$ una sucesión de v.a.i. con f.d. F_n. Demuestre que $P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, $\sum_n (1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon)) < \infty$.

4. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a.i. con $P(X_n = +1) = P(X_n = -1) = 1/2$. Definimos $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

   (a) Sea $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$. Demuestre que $Z_n, n \geq 1$ son independientes.

   (b) Demuestre que $\frac{1}{n} S_n$ converge a 0 en probabilidad.

   (c) Demuestre que $\frac{1}{n^2} S_{n^2}$ converge a 0 c.s.

5. Sea $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1\}$ el círculo unitario, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, la σ-álgebra de Borel en Ω y P la medida de Lebesgue normalizada, es decir, $P(A) = m(A)/\pi$, $A \in \mathcal{F}$. Definimos
$$X(\omega) = X(x, y) = x, \qquad Y(\omega) = Y(x, y) = y,$$
   y $(R(\omega), \theta(\omega))$ la representación polar de ω. Demuestre que las variables R y θ son independientes pero X y Y no lo son.