

Capítulo 4

El Teorema Central del Límite

4.1. El Teorema Central del Límite

En este capítulo estudiaremos uno de los resultados fundamentales de la teoría de probabilidad. Presentamos inicialmente el teorema central de límite para el caso de variables i.i.d. y luego consideramos el caso más general de sucesión independientes pero no idénticamente distribuidas, que se conoce como el teorema de Lindeberg-Feller. Estos resultados tienen generalizaciones en varias direcciones, que describimos sin demostración.

4.1.1. TCL para sucesiones iid

Comenzamos por un lema técnico que requerimos para la demostración del resultado principal.

Lema 4.1 *Supongamos que $a_i \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$ con $|a_i| \leq 1$ y $|b_i| \leq 1$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces*

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

Demostración. Para $n = 2$ tenemos

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = a_1(a_2 - b_2) + (a_1 - b_1)b_2.$$

Tomando módulos y usando el hecho de que los módulos de a_i y b_i están acotados por 1 se obtiene el resultado. Para n cualquiera se usa inducción. ■

Teorema 4.1 (TCL para variables iid) *Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a.i.i.d. con $E(X_n) = \mu$ y $\text{Var}(X_n) = \sigma^2$. Sea $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ entonces*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N.$$

Demostración. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $E(X_n) = 0$ y $\text{Var}(X_n) = 1$. Sean

$$\varphi_n(t) = E e^{itS_n/\sqrt{n}}, \quad \varphi(t) = E e^{itX_1},$$

entonces

$$\varphi_n(t) = (E e^{itX_1/\sqrt{n}})^n = \varphi^n(t/\sqrt{n}).$$

Como existen los dos primeros momentos podemos hacer un desarrollo de φ :

$$\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{it \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}} + \frac{i^2 t^2 \mathbb{E}(X_1^2)}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

donde

$$\left|o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\frac{|tX_1|^3}{6n^{3/2}} \wedge \frac{2|tX_1|^2}{2n}\right).$$

Veamos que

$$n o\left(\frac{t^2}{n}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{|tX_1|^3}{6n^{1/2}} \wedge |tX_1|^2\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Para esto observemos que

$$\frac{|tX_1|^3}{6\sqrt{n}} \wedge |tX_1|^2 \leq |tX_1|^2 \in L^1$$

y también

$$\frac{|tX_1|^3}{6\sqrt{n}} \wedge |tX_1|^2 \leq \frac{|tX_1|^3}{6\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Por el TCD

$$\mathbb{E}\left(\frac{|tX_1|^3}{6\sqrt{n}} \wedge |tX_1|^2\right) \rightarrow 0.$$

Ahora, usando el lema 4.1

$$\left|\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| \leq n \left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)\right| = n o\left(\frac{t^2}{n}\right) \rightarrow 0,$$

y ahora, como

$$\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \rightarrow e^{-t^2/2},$$

que es la función característica de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$, obtenemos el resultado. ■

4.1.2. El TCL de Lindeberg-Feller

Ahora generalizamos el TCL al caso de sumandos que no tienen la misma distribución. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a.i. pero no necesariamente idénticamente distribuidas, supongamos que X_k tiene función de distribución F_k , función característica φ_k , y que $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $\text{Var}(X_k) = \sigma_k^2$. Definimos

$$s_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2 = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right). \quad (4.1)$$

Definición 4.1 Decimos que $(X_n, n \geq 1)$ satisface la *condición de Lindeberg* si para todo t , cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k/s_n| > t\}}\right) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > ts_n} x^2 dF_k(x) \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Observación 4.1

1. La condición de Lindeberg implica

$$\frac{1}{s_n^2} \max_{k \leq n} \sigma_k^2 \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.3)$$

Para ver esto observemos que para $k \leq n$,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} &= \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E}(X_k^2) \\ &= \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E}(X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k/s_n| \leq t\}}) + \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E}(X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k/s_n| > t\}}) \\ &\leq t^2 + \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E}(X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k/s_n| > t\}}) \rightarrow t^2. \end{aligned}$$

De modo que para todo $t > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{k \leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} \right) \leq t^2.$$

Haciendo ahora $t \downarrow 0$ se obtiene el resultado.

2. La condición (4.3) implica

$$\max_{k \leq n} P(|X_k|/s_n > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.4)$$

por la desigualdad de Chebysheff.

Teorema 4.2 (Lindeberg) *La condición de Lindeberg (4.2) implica*

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Observación 4.2 Aunque no daremos la demostración, el recíproco también es cierto en el siguiente sentido: Si

$$\frac{1}{s_n^2} \max_{k \leq n} \sigma_k^2 \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

entonces la condición de Lindeberg vale. Este resultado se conoce como el teorema de Feller.

Antes de la demostración presentamos el siguiente lema, que será de utilidad.

Lema 4.2 *Sea $\{Y_n, n \geq 1\}$ una sucesión iid con distribución común F y función característica φ . Sea N independiente de la sucesión con distribución de Poisson de parámetro λ . Definimos $\chi_N = \sum_{i=1}^n Y_i$. La función característica de χ_N está dada por $e^{\lambda(\varphi(t)-1)}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{it\chi_N}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{it\chi_N} \mathbf{1}_{\{N=k\}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{it\chi_k} \mathbf{1}_{\{N=k\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{it\chi_k}) P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda \varphi(t)} = e^{\lambda(\varphi(t)-1)}. \end{aligned}$$

Concluimos, además, que $e^{\lambda(\varphi(t)-1)}$ también es una f.c. ■

Demostración del Teorema de Lindeberg. Por el teorema de continuidad basta demostrar que la f.c. de S_n/s_n satisface

$$\varphi_{S_n/s_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_k(t/s_n) \rightarrow e^{-t^2/2} \quad (4.5)$$

que es la f.c. de la distribución $\mathcal{N}(0, 1)$. Para esto, veremos en primer lugar que

$$\left| \prod_{k=1}^n \varphi_k(t/s_n) - \exp \left\{ \sum_{k=1}^n (\varphi_k(t/s_n) - 1) \right\} \right| \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

y luego veremos que

$$\sum_{k=1}^n (\varphi_k(t/s_n) - 1) + \frac{t^2}{2} \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

Parte 1. Veamos primero la demostración de (4.6). Recordemos que $\exp\{\varphi_k(t/s_n) - 1\}$ es una f.c. y por lo tanto su módulo está acotado por 1. Usando el lema 4.1,

$$\begin{aligned} \left| \exp \left\{ \sum_{k=1}^n (\varphi_k(t/s_n) - 1) \right\} - \prod_{k=1}^n \varphi_k(t/s_n) \right| &= \left| \prod_{k=1}^n e^{\varphi_k(t/s_n) - 1} - \prod_{k=1}^n \varphi_k(t/s_n) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |e^{\varphi_k(t/s_n) - 1} - \varphi_k(t/s_n)| \\ &= \sum_{k=1}^n |e^{\varphi_k(t/s_n) - 1} - 1 - (\varphi_k(t/s_n) - 1)|. \end{aligned}$$

Observamos ahora que para $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |e^z - 1 - z| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |z|^k = \frac{|z|^2}{1 - |z|} \\ &\leq \begin{cases} 2|z|^2, & \text{si } |z| \leq 1/2, \\ \delta|z|, & \text{si } |z| \leq \frac{\delta}{2} < \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para t fijo usamos (3.28) con $n = 1$ para obtener las desigualdades

$$|\varphi_k(t/s_n) - 1| \leq \frac{t^2}{2s_n^2} \sigma_k^2 \quad (4.9)$$

$$\leq \frac{t^2}{2s_n^2} \max_{k \leq n} \sigma_k^2. \quad (4.10)$$

Recordando (4.3), concluimos de (4.10) que dado $\delta > 0$, si n es suficientemente grande, para $k = 1, \dots, n$

$$|\varphi_k(t/s_n) - 1| \leq \frac{\delta}{2}. \quad (4.11)$$

Sea $z_k = \varphi_k(t/s_n) - 1$, usando (4.8)

$$\left| \exp \left\{ \sum_{k=1}^n (\varphi_k(t/s_n) - 1) \right\} - \prod_{k=1}^n \varphi_k(t/s_n) \right| \leq \sum_{k=1}^n |e^{z_k} - 1 - z_k| \leq \sum_{k=1}^n \delta |z_k|$$

para n grande, porque $\max_{k \leq n} |z_k| \leq \delta/2$ para n grande, y usando (4.9) obtenemos la cota

$$\leq \delta \frac{t^2}{2s_n^2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = \delta \frac{t^2}{2}$$

donde hemos usado (4.1). Como δ es arbitrario, obtenemos (4.6).

Parte 2. Ahora demostramos (4.7). Tenemos

$$\sum_{k=1}^n (\varphi_k(t/s_n) - 1) + \frac{t^2}{2} = \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(e^{itX_k/s_n} - 1 - i \frac{t}{s_n} X_k - \frac{1}{2} \left(\frac{it}{s_n} \right)^2 X_k^2 \right).$$

Denotemos por A el argumento de la esperanza en la expresión anterior. Tenemos la descomposición

$$\sum_{k=1}^n \left[\mathbb{E}(A \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n \leq \varepsilon\}}) + \mathbb{E}(A \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n > \varepsilon\}}) \right] = I + II.$$

Ahora veremos que I y II son pequeños. Para I tenemos, usando (3.29) con $n = 2$,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|A| \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n \leq \varepsilon\}}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(\frac{1}{3!} \left| \frac{t}{s_n} X_k \right|^3 \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n \leq \varepsilon\}} \right) \\ &= \frac{|t|^3}{6} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(\left| \frac{X_k}{s_n} \right|^3 \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n \leq \varepsilon\}} \right) \\ &\leq \frac{|t|^3}{6} \varepsilon \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(\left| \frac{X_k}{s_n} \right|^2 \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n \leq \varepsilon\}} \right) \\ &\leq \frac{|t|^3}{6} \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = \varepsilon \frac{|t|^3}{6} \end{aligned}$$

donde, de nuevo, hemos usado (4.1)

Ahora veamos que II es pequeño. Usando (3.29) tenemos

$$\begin{aligned} |II| &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(|A| \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n > \varepsilon\}}) \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\left| \frac{tX_k}{s_n} \right|^2 \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n > \varepsilon\}} \right) \\ &\leq \frac{t^2}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} (X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k|/s_n > \varepsilon\}}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

por la condición de Lindeberg. Esto completa la demostración de (4.7). ■

A continuación presentamos una condición suficiente para la condición de Lindeberg que es más sencilla de verificar.

Corolario 4.1 (Condición de Lyapunov) Sea $(X_k, k \geq 1)$ una sucesión de v.a.i. con $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $\text{Var}(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$. Si para algún $\delta > 0$

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} |X_k|^{2+\delta} \rightarrow 0$$

entonces se satisface la condición de Lindeberg y por lo tanto el TCL vale.

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k/s_n| > t\}} \right) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(\left| \frac{X_k}{s_n} \right|^2 \mathbf{1}_{\{|X_k/s_n| > t\}} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left(\left| \frac{X_k}{s_n} \right|^2 \left| \frac{X_k}{ts_n} \right|^\delta \mathbf{1}_{\{|X_k/ts_n| > 1\}} \right) \\ &\leq \frac{1}{t^\delta s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} |X_k|^{2+\delta} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

■

Observación 4.3 Un caso útil es cuando $\delta = 1$:

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} |X_k|^3 \rightarrow 0.$$

Ejemplo 4.1

Retomamos el ejemplo de los records que estudiamos en el Capítulo 2. Recordemos algunas definiciones y resultados. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables i.i.d. con función de distribución común F continua y sean $\mathbf{1}_k = \mathbf{1}_{\{X_k \text{ es un record}\}}$, $\mu_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_k$, de modo que μ_n es el número de records en X_1, \dots, X_n . Definimos el rango relativo de X_n en la muestra X_1, \dots, X_n por

$$R_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{X_j \geq X_n\}},$$

de modo que R_n vale 1 si X_n es un record, vale 2 si X_n es el segundo mayor valor, y así sucesivamente. Vimos que las variables $(R_n, n \geq 1)$ son independientes con $P(R_n = k) = 1/n$ para $k = 1, 2, \dots, n$ y que las variables $(\mathbf{1}_n, n \geq 1)$ son independientes de Bernoulli con $P(\mathbf{1}_k = 1) = 1/k$.

Demostramos en el Capítulo 2 la siguiente LGN: con probabilidad 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{\log n} = 1.$$

Probaremos ahora el siguiente teorema central de límite,

$$\frac{\mu_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Recordemos que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_k) = 1/k$ y $\text{Var}(\mathbf{1}_k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$. Por lo tanto

$$s_n^2 = \text{Var}(\mu_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim \log n,$$

y en consecuencia $s_n^3 \sim (\log n)^{3/2}$. Por otro lado

$$\mathbb{E} |\mathbf{1}_k - \mathbb{E}(\mathbf{1}_k)|^3 = \mathbb{E} \left| \mathbf{1}_k - \frac{1}{k} \right|^3 = \left| 1 - \frac{1}{k} \right|^3 \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} \right)^3 \left(1 - \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^3},$$

y

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} |\mathbf{1}_k - \mathbb{E}(\mathbf{1}_k)|^3 \leq \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^3} \right) \sim \frac{\log n}{(\log n)^{3/2}} \rightarrow 0.$$

Esto dice que la condición de Lyapunov es válida y

$$\frac{\mu_n - E(\mu_n)}{\sqrt{\text{Var}(\mu_n)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Observamos que $\sqrt{\text{Var}(\mu_n)} = s_n \sim \sqrt{\log n}$ y

$$\frac{E(\mu_n) - \log n}{\sqrt{\log n}} = \frac{1}{\sqrt{\log n}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \sim \frac{\gamma}{\sqrt{\log n}} \rightarrow 0,$$

donde γ es la constante de Euler. Por el teorema de convergencia a familias

$$\frac{\mu_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

▲

4.1.3. Sistemas Triangulares

Para $n \in \mathbb{N}$ consideremos las variables

$$X_{n1}, \dots, X_{nr_n}$$

para $r_n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ y asumimos que son independientes. Una colección de este tipo se conoce como un arreglo triangular de variables aleatorias. El TCL de Lindeberg considera el caso especial en el cual $r_n = n$ y $X_{nk} = X_k$ para todo n . Supongamos que todas las variables están centradas y definimos

$$\sigma_{nk}^2 = E(X_{nk}^2), \quad s_n^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{nk}^2. \quad (4.12)$$

Supongamos que $s_n > 0$. La condición de Lindeberg en este caso es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{s_n^2} \int_{|X_{nk}| \geq t s_n} X_{nk}^2 dP = 0 \quad (4.13)$$

para $t > 0$.

Teorema 4.3 Para $n \in \mathbb{N}$ sean X_{n1}, \dots, X_{nr_n} variables independientes, centradas, que satisfacen (4.12). Si (4.13) vale para todo $t > 0$ entonces $S_n/s_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.

Demostración. Ejercicio.

Supongamos ahora que $E|X_{nk}|^{2+\delta} < \infty$ para algún $\delta > 0$ y que la condición de Lyapunov se satisface:

$$\lim_n \sum_{k=1}^{r_n} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} E(|X_{nk}|^{2+\delta}) = 0, \quad (4.14)$$

entonces la condición de Lindeberg vale y el teorema es cierto.

Teorema 4.4 Supongamos que para cada n las variables X_{n1}, \dots, X_{nr_n} son independientes y usamos la notación (4.12). Si (4.14) vale para algún $\delta > 0$ entonces $S_n/s_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$.

Finalmente, presentamos la versión del teorema de Feller para arreglos triangulares,

Teorema 4.5 (Feller) Sea $(X_{nk}, 1 \leq k \leq r_n, n \geq 1)$ un arreglo triangular de variables independientes, centradas y con $E(X_{nk}) = \sigma_{nk}^2 < \infty$ para todo $1 \leq k \leq r_n, n \geq 1$. Supongamos que para todo $t > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq r_n} P(|X_{nk}| > ts_n) = 0.$$

Si se tiene que

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

entonces el arreglo satisface la condición de Lindeberg.

Ejemplo 4.2

Sea

$$Y_k = \beta x_k + \varepsilon_k, \quad k \geq 1 \quad (4.15)$$

un modelo de regresión lineal simple, donde $(x_n, n \geq 1)$ es una sucesión de números reales, β es el parámetro de regresión y $(\varepsilon_n, n \geq 1)$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. centradas y con varianza σ^2 . El estimador de mínimos cuadrados de β basado en Y_1, \dots, Y_n está dado por

$$\hat{\beta}_n = \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^n x_k Y_k,$$

donde $a_n^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Supongamos que la sucesión $(x_n, n \geq 1)$ satisface

$$\frac{1}{a_n} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.16)$$

Entonces

$$a_n(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (4.17)$$

Para demostrar este resultado comenzamos por considerar

$$\begin{aligned} a_n(\hat{\beta}_n - \beta) &= a_n \left(\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^n x_k Y_k - \beta \right) = \frac{1}{a_n} \left(\sum_{k=1}^n x_k Y_k - a_n^2 \beta \right) \\ &= \frac{1}{a_n} \left(\sum_{k=1}^n x_k (\beta x_k + \varepsilon_k) - \beta \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n x_k \varepsilon_k = \sum_{k=1}^n X_{nk} \end{aligned}$$

con $X_{nk} = x_k \varepsilon_k / a_n, 1 \leq k \leq n, n \geq 1$. Observamos que $E(X_{nk}) = 0, E(X_{nk}^2) < \infty$ y

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^n E(X_{nk}^2) = \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 E(\varepsilon_k^2) = \sigma^2.$$

En consecuencia, $(X_{nk}, 1 \leq k \leq n, n \geq 1)$ es un arreglo triangular de variables independientes, centradas y con varianza finita. Sea

$$m_n = \frac{1}{a_n} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

entonces, por (4.16), para cualquier $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n E X_{nk}^2 \mathbf{1}_{(|X_{nk}| > \delta s_n)} &= \frac{1}{\sigma^2 a_n^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 E(\varepsilon_k^2 \mathbf{1}_{(|x_k \varepsilon_k / a_n| > \delta \sigma)}) \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2 a_n^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 E(\varepsilon_1^2 \mathbf{1}_{(m_n |\varepsilon_1| > \delta \sigma)}) \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} E(\varepsilon_1^2 \mathbf{1}_{(m_n |\varepsilon_1| > \delta \sigma)}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

por el TCD. Por lo tanto el sistema triangular satisface la condición de Lindeberg y por el teorema 4.3, (4.17) es cierta. \blacktriangle

4.1.4. Extensiones

En esta sección presentamos sin demostración algunas extensiones del Teorema Central de Límite.

Cantidad Aleatoria de Sumandos

Teorema 4.6 Sea X_1, X_2, \dots v.a.i.i.d. con media 0 y varianza finita σ^2 y sea $S_n = X_1 + \dots + X_n$ para $n \geq 1$. Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ una familia de variables aleatorias positivas, con valores enteros y tales que para algún $0 < \theta < \infty$ se tiene que

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{P} \theta \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{S_{N(t)}}{\sigma\sqrt{N(t)}} &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \\ \frac{S_{N(t)}}{\sigma\sqrt{\theta t}} &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Demostración. Ver A. Gut, *Probability: A Graduate Course*. 2nd. Ed. Springer 2013, Cap. 7.

Velocidad de Convergencia

El TCL nos dice que si n es grande, $\bar{X}_n - \mu \approx (\sigma/\sqrt{n})N$ donde $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Una pregunta natural es ¿Cuán buena es esta aproximación? es decir, ¿con qué velocidad se da la convergencia en el TCL?

El siguiente resultado fue probado, de manera independiente, por A. C. Berry y C.-G. Esseen.

Teorema 4.7 (Berry-Esseen) Sean X_1, X_2, \dots v.a.i.i.d. con $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Sea $\mu = E(X_1)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ y supongamos que $\gamma^3 = E|X|^3 < \infty$. Sea F_n la función de distribución de $(S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$, entonces

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{\gamma^3}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

donde $C < 0.5$ es una constante numérica.

En el caso de variables independientes pero no idénticamente distribuidas tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.8 Sean X_1, X_2, \dots v.a.i. con media cero y $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Sea $\sigma_k^2 = \text{Var}(X_k)$ y supongamos que $\gamma_k^3 = E|X_k|^3 < \infty$ para todo k . Sea $s_n^2 = \sum_1^n \sigma_k^2$, $\beta_n = \sum_1^n \gamma_k^3$ y F_n la función de distribución de S_n/s_n , entonces

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{\beta_n^3}{s_n^3},$$

donde C es una constante numérica.

Demostración. Ver Ver A. Gut, *Probability: A Graduate Course*. 2nd. Ed. Springer 2013, Cap. 7.

Teorema Central de Límite Local

El TCL dice que la f.d. de sumas de variables aleatorias S_n debidamente normalizadas convergen a la f.d. $\mathcal{N}(0, 1)$. La pregunta que nos hacemos ahora es si el resultado vale a nivel de las densidades. En general, no es cierto que si $F_n(x) \rightarrow F(x)$ entonces $F'_n(t) \rightarrow F'(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$ pero bajo condiciones bastante generales tenemos el siguiente resultado, que se conoce como el TCL local.

Teorema 4.9 (TCL local) Sean X_1, X_2, \dots v.a.i.i.d. con media cero y varianza 1, y supongamos que su función característica φ satisface

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^r dt < \infty$$

para algún entero $r \geq 1$. Entonces la densidad g_n de $U_n = S_n/\sqrt{n}$ existe para $n \geq r$ y

$$g_n(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad n \rightarrow \infty$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ver Grimmett & Stirzaker, Cap. 5.

Dependencia

El TCL puede extenderse a ciertas clases de sucesiones dependientes y hay numerosos resultados en este sentido. Vamos a mencionar sólo uno de ellos para sucesiones que satisfacen una condición 'mixing' o de mezcla.

Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias y consideremos dos conjuntos, $A \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$ y $B \in \sigma(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \dots)$ para $k \geq 1, n \geq 1$. Si existe una sucesión α_n tal que para cualesquiera A, B que satisfagan la condición anterior se tiene que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \alpha_n$$

y $\alpha_n \rightarrow 0$, decimos que la sucesión $X_n, n \geq 1$ es α -mixing. La idea es que si n es grande, los conjuntos A y B dependen de variables que están muy separadas en la sucesión, y en consecuencia deben ser (casi) independientes.

Teorema 4.10 (TCL para sucesiones α -mixing) Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión α -mixing. Si existe $\delta > 0$ tal que $E|X_1|^{2+\delta} < \infty$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{\delta/(2+\delta)} < \infty$$

entonces vale el TCL.

Para la demostración y extensiones a otros tipos de condiciones mixing ver P. Doukhan, *Mixing. Properties and Examples. Lecture Notes in Statistics 85*, Springer.

Una condición sencilla que implica α -mixing es la m -dependencia. Una sucesión $X_n, n \geq 1$ es m -dependiente si (X_1, \dots, X_k) y (X_{k+n}, \dots) son independientes para cualquier k , siempre que $n > m$. En este caso la sucesión es α -mixing con $\alpha_n = 0$ para $n > m$.

Por ejemplo, si Y_1, Y_2, \dots son i.i.d. y definimos $X_n = f(Y_n, \dots, Y_{n+m})$ para una función $f: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $(X_n, n \geq 1)$ es estacionaria y m -dependiente.

4.1.5. Grandes Desviaciones

La LFGN nos dice que la suma S_n de n v.a.i.i.d. es aproximadamente $n\mu$, donde μ es la media común. El TCL dice que las desviaciones de S_n de $n\mu$ son típicamente de orden \sqrt{n} , es decir, son de orden menor que el valor medio. Sin embargo, la distancia de S_n a $n\mu$ puede ser de orden mayor que \sqrt{n} , por ejemplo n^α , donde $\alpha > 1/2$, y en particular puede ser de orden n . La teoría de Grandes Desviaciones estudia el comportamiento asintótico de

$$P(|S_n - n\mu| > n^\alpha) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

para $\alpha > 0.5$.

Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de v.a.i.i.d. con $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Supongamos que $E(X) = \mu$ y sumas parciales $S_n = X_1 + \dots + X_n$ y queremos estimar $P(S_n > na)$ para $a > \mu$. La función generadora de momentos $M(t) = E(e^{tX})$ y su logaritmo, la función generadora de cumulantes $\Lambda(t) = \log M(t)$ juegan un papel en este problema. La función Λ tiene las siguientes propiedades: $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda'(0) = \mu$ si $M'(0)$ existe y $\Lambda(t)$ es convexa donde esté definida. Esto se puede ver porque la segunda derivada $\Lambda''(t)$ es no-negativa.

Definimos

$$\Lambda^*(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (at - \Lambda(t)), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Teorema 4.11 (Grandes Desviaciones) Sean X_1, X_2, \dots v.a.i.i.d. con media μ y supongamos que su f.g.m. $M(t) = E(e^{tX})$ es finita en alguna vecindad del origen. Sea $a > \mu$ tal que $P(X > a) > 0$. Entonces $\Lambda^*(a) > 0$ y

$$\frac{1}{n} \log P(S_n > na) \rightarrow \Lambda^*(a), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Demostración. Ver Grimmett & Stirzaker, Cap. 5.

Bajo las condiciones del teorema, $P(S_n > na)$ decae exponencialmente como $e^{-n\Lambda^*(a)}$.

4.2. Distribuciones Estables

Si X_1, X_2, \dots son i.i.d. con media μ y varianza σ^2 finitas, sabemos por los resultados anteriores que

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Por lo tanto la sucesión $a_n^{-1}(S_n - b_n)$ sólo puede converger a una distribución normal. Si no requerimos que las varianzas sean finitas, es posible obtener límites que no son normales. Por ejemplo, supongamos que X_i tiene distribución de Cauchy con densidad

$$f(x) = \frac{\theta}{\pi(x^2 + \theta^2)}, \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

La función característica correspondiente es $\varphi(t) = e^{-\theta|t|}$, por lo tanto S_n tiene f.c. $\varphi^n(t) = e^{-n\theta|t|}$ y $n^{-1}S_n$ tiene f.c. $\varphi^n(t/n) = e^{-\theta|t|}$. En consecuencia $n^{-1}S_n \xrightarrow{d} X$ donde X tiene distribución de Cauchy con el mismo parámetro θ . Como $E|X| = \infty$ esto no contradice los resultados previos.

Definición 4.2 La distribución de una v.a. X es estable en sentido amplio si dadas X, X_1, X_2, \dots v.a.i.i.d. con $S_n = X_1 + \dots + X_n$ para $n \geq 1$ existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ para $n \geq 1$ tales que

$$S_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n, \quad \text{para todo } n.$$

La distribución es estrictamente estable si $b_n = 0$ para todo n .

Observamos que la distribución normal con media 0 es estrictamente estable con $a_n = \sqrt{n}$ y que la distribución de Cauchy estándar es estrictamente estable con $a_n = n$.

En general, sean X, X_1, X_2, \dots v.a.i. con la misma distribución estable y supongamos para simplificar que la distribución es simétrica. Entonces podemos interpretar S_{2n} de dos maneras:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n X_k + \sum_{k=n+1}^{2n} X_k \quad \text{y} \quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} X_k$$

y recordando que $S_n \stackrel{d}{=} a_n X$ obtenemos que

$$a_2 a_n X \stackrel{d}{=} a_2 S_n \stackrel{d}{=} S_{2n} \stackrel{d}{=} a_{2n} X,$$

lo cual implica que $a_{2n} = a_2 a_n$. De manera similar si dividimos la suma S_{mn} en bloques de tamaño m , obtenemos que la sucesión $\{a_n, n \geq 1\}$ es multiplicativa:

$$a_{mn} = a_m a_n.$$

La ecuación anterior se conoce como la ecuación de Hamel y es posible demostrar que su solución es

$$n^{1/\alpha} \quad \text{para } \alpha > 0. \quad (4.18)$$

Por otro lado como $S_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X$, la función característica de una distribución estable simétrica debe satisfacer

$$\varphi(t) = (\varphi(t/n^{1/\alpha}))^n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (4.19)$$

Es posible demostrar que en este caso la función característica es

$$\varphi(t) = e^{-c|t|^\alpha}, \quad (4.20)$$

donde $c > 0$ es una constante. Es fácil verificar que esta f.c. satisface (4.19).

Para $\alpha > 2$ (4.20) implica que $\varphi(t) = 1 + o(t^2)$ para t cerca del origen, lo cual implica que la varianza vale 0, y por unicidad φ no puede ser una f.c. Por lo tanto los únicos valores posibles son $0 < \alpha \leq 2$.

Resumimos las propiedades principales de las distribuciones estables simétricas en la siguiente proposición

Proposición 4.1 *Si X tiene distribución estable simétrica con índice α y f.c. φ entonces*

- $0 < \alpha \leq 2$.
- $\varphi(t) = e^{-c|t|^\alpha}$, $c > 0$.
- $E|X|^r < \infty$ para $r < \alpha < 2$.
- $E|X|^r = \infty$ para $r \geq \alpha$, $0 < \alpha < 2$.

En el caso general es posible demostrar que la f.c. es de la forma

$$\varphi(t) = \exp \left\{ i\mu t - c|t|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\} \quad (4.21)$$

para $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$, $|\beta| \leq 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, $c > 0$, y

$$\varphi(t) = \exp \left\{ i\mu t - c|t|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \log |t| \right) \right\} \quad (4.22)$$

para $\alpha = 1$, $|\beta| \leq 1$, $\mu \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

El parámetro α es el *índice*, y β es el parámetro de asimetría. Observamos que la distribución es simétrica respecto a μ cuando $\beta = 0$.

Además, como la f.c. es integrable, concluimos que las distribuciones estables simétricas son absolutamente continuas, y que las densidades pueden obtenerse usando la fórmula de inversión. Sin embargo, sólo para tres casos $\alpha = 1/2, 1$ y 2 se tienen expresiones cerradas. Para el resto de los valores las densidades se expresan como series infinitas.

Veamos que una variable con f.c. de la forma (4.21) o (4.22) tiene que ser estable. Si X_1, \dots, X_n son i.i.d. con f.c. de alguna de la formas descritas, sea g el exponente de la función característica y $\lambda = 1/\alpha$ en el caso (4.21) y $\lambda = 1$ en el caso (4.22). Entonces, en el primer caso

$$g(n^\lambda t) = itn^\lambda \mu - cn|t|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) = ng(t) - it\mu(n - n^\lambda),$$

y en el segundo,

$$\begin{aligned} g(n^\lambda t) &= g(nt) = itn\mu - cn|t| \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} (\log n + \log |t|)\right) \\ &= ng(t) - itc\beta \frac{2}{\pi} n \log n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en ambos casos

$$\varphi^n(t) = \exp\{ng(t)\} = \exp\{g(n^\lambda t)\} \exp\{ib_n t\} = \varphi(n^\lambda t) \exp\{ib_n t\}$$

donde $b_n = \mu(n - n^\lambda)$ en el primer caso y $b_n = c\beta(2/\pi)n \log n$ en el segundo caso. Por lo tanto $S_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$ con $a_n = n^\lambda = n^{1/\alpha}$ y X es estable.

Teorema 4.12 *La variable X es estable si y sólo si hay una sucesión $(X_n, n \geq 1)$ de v.a.i.i.d. con $S_n = X_1 + \dots + X_n$ tal que*

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} X \tag{4.23}$$

donde $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si X es estable, sean X_1, \dots, X_n i.i.d. con la misma distribución que X . Entonces $S_n = X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$ por la definición y por lo tanto (4.23) vale.

Supongamos ahora que X_1, X_2, \dots son i.i.d. con $V_n = a_n^{-1}(S_n - b_n) \xrightarrow{d} X$. Si X es una variable degenerada, entonces es estable, así que podemos suponer que X no es degenerada. Sea $r \in \mathbb{N}$ fijo, definimos

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= X_1 + \dots + X_n, \\ S_n^{(2)} &= X_{n+1} + \dots + X_{2n}, \\ &\vdots \\ S_n^{(r)} &= X_{(r-1)n+1} + \dots + X_{rn}. \end{aligned}$$

Llamemos

$$Z_n^{(j)} = \frac{S_n^{(j)} - b_n}{a_n}$$

y $W_n^{(r)} = Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(r)}$. Observamos que las variables $Z_n^{(j)}$, $1 \leq j \leq r$ son independientes y todas tienen la misma distribución: $Z_n^{(j)} \stackrel{d}{=} Z_n^{(1)}$ para todo j . Por lo tanto $Z_n^{(j)} \xrightarrow{d} X$ para todo j . En consecuencia

$$W_n^{(r)} \xrightarrow{d} Z_1 + \dots + Z_r,$$

donde las variables Z_1, \dots, Z_r son i.i.d. con $Z_i \stackrel{d}{=} X$.

Pero también podemos escribir

$$\begin{aligned} W_n^{(r)} &= \frac{X_1 + \dots + X_{rn} - rb_n}{a_n} = \frac{a_{rn}}{a_n} \left(\frac{X_1 + \dots + X_{rn} - b_{rn}}{a_{rn}} \right) + \frac{b_{rn} - rb_n}{a_n} \\ &= \alpha_n^{(r)} V_{rn} + \beta_n^{(r)} \end{aligned}$$

donde $\alpha_n^{(r)} = a_{rn}/a_n > 0$, $\beta_n^{(r)} = (b_{rn} - rb_n)/a_n$ y $V_{rn} = (S_{rn} - b_{rn})/a_{rn}$. Resumiendo,

$$V_{rn} = \frac{W_n^{(r)} - \beta_n^{(r)}}{\alpha_n^{(r)}}, \quad V_{rn} \xrightarrow{d} X, \quad W_n^{(r)} \xrightarrow{d} Z_1 + \dots + Z_r.$$

Por el teorema de convergencia a familias $\alpha_n^{(r)} \rightarrow \alpha_r > 0$, $\beta_n^{(r)} \rightarrow \beta_r$ y

$$X \stackrel{d}{=} \frac{Z_1 + \dots + Z_r - \beta_r}{\alpha_r}$$

de modo que X es estable. ■

Observación 4.4 Si r y s son enteros positivos

$$\alpha_n^{(rs)} = \frac{a_{rsn}}{a_n} = \frac{a_{rn}}{a_n} \frac{a_{rsn}}{a_{rn}} = \alpha_n^{(r)} \alpha_{rn}^{(s)},$$

y haciendo $n \rightarrow \infty$ obtenemos $\alpha_{rs} = \alpha_r \alpha_s$.

4.2.1. Dominios de Atracción.

Definición 4.3 Sea X, X_1, X_2, \dots variables i.i.d. con sumas parciales $\{S_n, n \geq 1\}$. Decimos que X , o equivalentemente su f.d. F_X , pertenece al dominio de atracción de la distribución (no degenerada) G si existen sucesiones de normalización $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ para $n \geq 1$ tales que

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} G \quad (n \rightarrow \infty).$$

Usaremos la notación $F_X \in \mathcal{D}(G)$ o alternativamente $X \in \mathcal{D}(G)$.

La primera observación es que si $\text{Var}(X) < \infty$, el TCL nos dice que X pertenece al dominio de atracción de la distribución normal, basta tomar $b_n = nE(X)$ y $a_n = \sqrt{n \text{Var}(X)}$. En particular, la distribución normal pertenece a su dominio de atracción y en general lo mismo pasa para las leyes estables.

Antes de presentar el siguiente resultado requerimos algunas definiciones.

Definición 4.4 Una función medible $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es de variación regular en ∞ con índice α (notación: $U \in VR_\alpha$ o $\text{fvr}(\alpha)$) si para $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha.$$

Si $\alpha = 0$ decimos que U es de variación lenta, y en general denotamos estas funciones con la letra L .

El número α se conoce como como el exponente o índice de variación regular. Si $U \in VR_\alpha$ entonces $U(x)/x^\alpha \in VR_0$ y poniendo $L(x) = U(x)/x^\alpha$ vemos que es posible representar una función de variación regular de índice α como $x^\alpha L(x)$.

El ejemplo canónico de función de variación regular es x^α . Las funciones $\log(x)$, $\log \log(x)$ y $\exp\{(\log x)^\alpha\}$ para $0 < \alpha < 1$ son de variación lenta, así como cualquier función $L(x)$ con límite finito cuando $x \rightarrow \infty$. Las funciones e^x y $\cos x$ no son de variación regular ni de variación lenta.

Teorema 4.13 *Una v.a. con f.d. F pertenece al dominio de atracción de una distribución estable si y sólo si existe una función de variación lenta en infinito L tal que*

$$U(x) = E [X^2 \mathbf{1}_{\{|X| \leq x\}}] \sim x^{2-\alpha} L(x), \quad (x \rightarrow \infty), \quad (4.24)$$

y, además, para $\alpha \in (0, 2)$,

$$\frac{P(X > x)}{P(|X| > x)} \rightarrow p \quad \frac{P(X < -x)}{P(|X| > x)} \rightarrow 1 - p \quad (x \rightarrow \infty). \quad (4.25)$$

Es posible demostrar que (4.24) es equivalente a

$$\frac{x^2 P(|X| > x)}{U(x)} \rightarrow \frac{2 - \alpha}{\alpha} \quad (x \rightarrow \infty), \quad \text{para } 0 < \alpha \leq 2, \quad (4.26)$$

$$P(|X| > x) \sim \frac{2 - \alpha}{\alpha} \frac{L(x)}{x^\alpha} \quad (x \rightarrow \infty), \quad \text{para } 0 < \alpha < 2, \quad (4.27)$$

Esto nos da la siguiente formulación alternativa del teorema anterior

Teorema 4.14 *Una v.a. X con f.d. F pertenece al dominio de atracción de*

(a) *la distribución normal si y solo si U es de variación lenta.*

(b) *una distribución estable con índice $\alpha \in (0, 2)$ si y solo si (4.27) y (4.25) valen.*

Como consecuencia de la demostración de los teoremas anteriores se obtiene que $a_n \sim n^{1/\alpha} (L(a_n))^{1/\alpha}$. Poniendo $L^*(n) \sim (L(a_n))^{1/\alpha}$ se tiene que

$$a_n \sim n^{1/\alpha} L^*(n)$$

para una función de variación lenta L^* .

Para $\alpha = 2$ la condición (4.24) dice que U debe ser de variación lenta. Un caso en el cual esto es cierto es cuando la varianza es finita: $U(\infty) < \infty$, en cuyo caso $a_n \sim c\sqrt{n}$. El otro caso es cuando la varianza es infinita: $U(\infty) = \infty$. Esto ocurre, por ejemplo, si $U(x) \sim \log x$ o $U(x) \sim \log \log x$ cuando $x \rightarrow \infty$. En estos casos la distribución límite es normal pero la normalización será de la forma $a_n \sim \sqrt{n}L(n)$.

Ejemplo 4.3

Sea X, X_1, X_2, \dots v.a.i.i.d. con densidad Pareto simétrica de índice 2:

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad |x| > 1.$$

La distribución es simétrica, la media es infinita y las colas decrecen como las de la distribución de Cauchy, así que esperaríamos que la distribución pertenezca al dominio de atracción de la distribución estable simétrica con índice $\alpha = 1$.

Integrando obtenemos

$$P(X > x) = \frac{1}{2x}, \quad P(X < -x) = \frac{1}{2|x|}, \quad P(|X| > x) = \frac{1}{x}, \quad U(x) = x - 1,$$

de modo que (4.24)-(4.27) se satisfacen con $p = 1/2$ y $L(x) = 1$ y por lo tanto la conjetura es correcta.

Ejemplo 4.4

Sea X, X_1, X_2, \dots v.a.i.i.d. con densidad Pareto simétrica de índice 3:

$$f(x) = \frac{1}{|x|^3}, \quad |x| > 1.$$

En este caso la varianza es infinita: $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3} dx = +\infty$.

Comenzamos por investigar (4.24):

$$U(x) = \int_{|y| \leq x} y^2 f(y) dy = 2 \int_0^x \frac{1}{y} dy = 2 \log x,$$

de modo que U es de variación lenta en infinito, es decir, X pertenece al dominio de atracción de la distribución normal. Por lo tanto, para constantes normalizadoras apropiadas a_n ,

$$\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Como la varianza es infinita, la constante de normalización es $a_n \sim \sqrt{n2 \log(a_n)}$. Con una primera aproximación, $a_n \approx \sqrt{n}$ y obtenemos

$$a_n \sim \sqrt{n2 \log \sqrt{n}} = \sqrt{n \log n},$$

y tenemos

$$\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

4.3. Distribuciones Infinitamente Divisibles

En el ejemplo 3.8 del tema anterior vimos que la distribución de Poisson se puede obtener como límite de sucesiones de variables binomiales para las cuales la probabilidad de éxito $p = p(n)$ tiende a cero de modo que $np(n) \rightarrow \lambda > 0$.

Este resultado se puede considerar como una ley límite para sumas de variables independientes: Ponemos $S_n = X_{n,1} + X_{n,2} + \dots + X_{n,n}$ donde las variables $X_{n,i}, i = 1, \dots, n$ son independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito $p(n)$. La diferencia con los resultados anteriores es que ahora no estamos considerando una sucesión de variables aleatorias sino que para cada n tenemos una colección distinta de variables $X_{n,i}, i = 1, \dots, n$, es decir, tenemos un arreglo triangular como los considerados en la sección 4.1.3. Veamos cómo es el comportamiento general de este tipo de estructuras.

Consideramos sistemas triangulares de la forma $X_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1, k_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. usualmente tendremos $k_n = n$ pero los resultados son válidos en el caso más general. Suponemos que las variables de una fila son independientes, ponemos $T_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$ y queremos investigar la convergencia en ley de estas variables.

Vamos a considerar el caso en el cual los elementos de cada fila son idénticamente distribuidas: Para cada n , $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ son i.i.d. y queremos caracterizar las leyes límite.

Definición 4.5 Una variable aleatoria X (o su función de distribución F o su función característica φ) es infinitamente divisible si y sólo si para cada n , X tiene la misma distribución que la suma de n variables independientes e idénticamente distribuidas. En términos de la función característica, $\varphi = (\varphi_n)^n$ donde φ_n es una función característica.

Teorema 4.15 Una variable X es infinitamente divisible (i.d.) si y sólo si existe un arreglo triangular con $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ i.i.d. para cada n , tal que

$$T_n = \sum_{k=1}^n X_{n,k} \xrightarrow{d} X.$$

Demostración. Supongamos que tenemos un arreglo triangular con $X_{n,k}, 1 \leq k \leq n$, i.i.d. para cada n y $T_n \xrightarrow{d} X$. Fijamos un entero positivo r y ponemos

$$T_{rn} = Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(r)},$$

donde

$$\begin{aligned} Z_n^{(1)} &= X_{rn,1} + \cdots + X_{rn,n}, \\ Z_n^{(2)} &= X_{rn,n+1} + \cdots + X_{rn,2n}, \\ &\vdots \\ Z_n^{(r)} &= X_{rn,(r-1)n+1} + \cdots + X_{rn,rn}. \end{aligned}$$

Como $T_{rn} \xrightarrow{d} X$ cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que $\{T_{rn}, n = 1, 2, \dots\}$ es relativamente compacta, y por el teorema de Prohorov (teorema 3.10) la sucesión es tensa. Pero, usando la independencia tenemos que

$$\begin{aligned} (P(Z_n^{(1)} > z))^r &= P(Z_n^{(1)} > z, \dots, Z_n^{(r)} > z) \\ &\leq P(T_{rn} > rz) \end{aligned}$$

y de manera similar

$$(P(Z_n^{(1)} < -z))^r \leq P(T_{rn} < -rz)$$

Esto muestra que la sucesión $(Z_n^{(1)})_{n \geq 1}$ es tensa y en consecuencia es relativamente compacta. Por lo tanto tenemos una subsucesión $(Z_{n_k}^{(1)})$ que converge en distribución a una variable aleatoria Y . Pero como las $Z_n^{(i)}, i = 1, \dots, r$ son i.i.d., para cualquier i se tiene también que $(Z_{n_k}^{(i)})$ converge en distribución a la variable aleatoria Y . Por lo tanto $T_{rn} \xrightarrow{d} Y_1 + \cdots + Y_r$, donde Y_1, \dots, Y_r son i.i.d. con $Y_i \stackrel{d}{=} Y$. Pero $T_{rn} \xrightarrow{d} X$ y en consecuencia $X \stackrel{d}{=} Y_1 + \cdots + Y_r$. ■

Es posible demostrar que el resultado es cierto si en lugar de pedir que las variables de cada fila sean i.i.d. se pide independencia y una condición del tipo

$$\max_{1 \leq i \leq n} P(|X_{n,i}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Ejemplos 4.5

1. Las leyes estables son infinitamente divisibles. Basta observar que si $X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} a_n X + b_n$ entonces

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^n \left(\frac{X_i}{a_n} - \frac{b_n}{na_n} \right)$$

2. Una variable aleatoria con distribución de Poisson es infinitamente divisible. Supongamos que Y tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. La función característica de Y es

$$\varphi(t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

y en consecuencia si $Y_i \sim Pois(\lambda_i)$ entonces $Y_1 + \cdots + Y_n \sim Pois(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$. En particular si $Y \sim Pois(\lambda)$ entonces $Y \stackrel{d}{=} Y_1 + \cdots + Y_n$ donde las Y_i son independientes y tienen distribución $Pois(\lambda/n)$.

3. Si Y es infinitamente divisible, también lo es $aY + b$. Por lo tanto si $Y \sim Pois(\lambda)$, $aY + b, a \neq 0$ es infinitamente divisible y su función característica es $\exp\{ibt + \lambda(e^{iat} - 1)\}$.
4. La distribución gamma es infinitamente divisible. La densidad de esta distribución es

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \quad \text{para } x \geq 0.$$

La función característica de X es

$$\varphi(t) = (1 - i\beta t)^{-\alpha} = [(1 - i\beta t)^{-\alpha/n}]^n,$$

de modo que X es la suma de n variables independientes con distribución gamma de parámetros α/n y β .

Veamos ahora algunas propiedades generales de las distribuciones infinitamente divisibles.

Lema 4.3 *Si φ_1 y φ_2 son f.c. infinitamente divisibles también lo es $\varphi_1\varphi_2$. Si φ es infinitamente divisible, su conjugada compleja $\bar{\varphi}$ y $|\varphi|^2$ también son infinitamente divisibles.*

Demostración.

Si $\varphi_i = (\varphi_{ni})^n$ para $i = 1, 2$, entonces $\varphi_1\varphi_2 = (\varphi_{n1}\varphi_{n2})^n$. Pero $\varphi_{n1}\varphi_{n2}$ es la función característica de la suma de dos v.a.i. con f.c. φ_{n1} y φ_{n2} , de modo que $\varphi_{n1}\varphi_{n2}$ es infinitamente divisible.

Por otro lado si X tiene f.c. φ , $-X$ tiene f.c. $\bar{\varphi}$. Por lo tanto si $\varphi = (\varphi_n)^n$ entonces $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_n)^n$ también es infinitamente divisible. Finalmente, $|\varphi|^2 = \varphi\bar{\varphi}$, también es infinitamente divisible. ■

Teorema 4.16 *Si φ_n para $n \geq 1$ es una sucesión de f.c. infinitamente divisibles y $\varphi_n \rightarrow \varphi$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces φ es infinitamente divisible.*

Demostración. Sea Z_n una v.a. con f.c. φ_n para $n \geq 1$. Para todo entero positivo r fijo tenemos que $Z_n \stackrel{d}{=} Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(r)}$ donde las $Z_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, r$ son i.i.d. Si Z es una v.a. con f.c. φ entonces $Z_n \stackrel{d}{\rightarrow} Z$ por el teorema de continuidad. En consecuencia $(Z_n)_{n \geq 1}$ es relativamente compacta y por lo tanto tensa. Al igual que en la demostración del teorema 4.15 vemos que $(Z_n^{(1)})_{n \geq 1}$ es tensa. Por lo tanto existe una subsucesión $(Z_{n_i}^{(1)})_{i \geq 1}$ que converge en distribución a una variable aleatoria Y_1 . Al igual que en el teorema 4.15 concluimos que $Z_{n_i} \stackrel{d}{\rightarrow} Y_1 + \dots + Y_r$, donde las Y_k son i.i.d. con $Y_k \stackrel{d}{=} Y_1$. Pero también tenemos que $Z_n \stackrel{d}{\rightarrow} Z$. Por lo tanto $Z \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_r$ y φ es infinitamente divisible ■

Supongamos que φ es una f.c. infinitamente divisible ¿Es posible representar a φ de dos maneras distintas como la n -ésima potencia de funciones características diferentes? Supongamos que φ_n y ψ_n son dos funciones características tales que $\varphi_n^n = \psi_n^n$. Como ambas son funciones características tenemos que $\varphi_n(0) = 1 = \psi_n(0)$. Supongamos que φ_n y ψ_n nunca se anulan en \mathbb{R} y veamos que bajo esta condición $\varphi_n = \psi_n$.

Como $(\varphi_n/\psi_n)^n = 1$, φ_n/ψ_n es una función continua de \mathbb{R} a $\{\exp\{i2\pi k/n\}, k = 0, 1, \dots, n-1\}$. Como \mathbb{R} es un conjunto conexo y su imagen bajo una función continua también lo es, la imagen de \mathbb{R} bajo φ_n/ψ_n debe ser constante, y como φ_n y ψ_n tienen un valor común, esa constante debe ser 1. Por lo tanto la representación es única, siempre y cuando podamos demostrar que una f.c. infinitamente divisible nunca se anula.

Teorema 4.17 *Una f.c. infinitamente divisible nunca se anula.*

Demostración.

Sean φ y φ_n f.c. tales que $\varphi = \varphi_n^n$. Por el lema 4.3 $f = |\varphi|^2$ y $f_n = |\varphi_n|^2$ son también f.c. y son reales positivas. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $f(t)$ es real y positiva y por lo tanto su n -ésima raíz real positiva es única y la denotamos por $(f(t))^{1/n}$. Como tenemos que $f(t) = (f_n(t))^n$ y $f_n(t)$ es positivo, tenemos que, para todo t ,

$$f_n(t) = (f(t))^{1/n}.$$

Pero sabemos que $0 \leq f(t) \leq 1$ y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(t))^{1/n}$ vale 0 ó 1, según $f(t) = 0$ ó $f(t) \neq 0$. Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ existe para todo t y la función límite, que llamaremos $g(t)$, puede tomar a lo

sumo dos valores, 0 y 1. Por otro lado, como f es continua en $t = 0$ con $f(0) = 1$, existe un $t_0 > 0$ tal que $f(t)$ no se anula para $|t| \leq t_0$, y en consecuencia $g(t) = 1$ para $|t| \leq t_0$. Por lo tanto la sucesión de f.c. f_n converge a la función g , que hemos visto que es continua en 0. Por el teorema de continuidad g debe ser una f.c. y por lo tanto es una función continua. En consecuencia g vale 1 siempre y para todo t

$$|\varphi(t)|^2 = f(t) \neq 0$$

■

El siguiente resultado, que se conoce como la representación de Lévy-Khinchin, caracteriza la clase de las distribuciones infinitamente divisibles.

Teorema 4.18 *La variable aleatoria X tiene distribución infinitamente divisible si y sólo si*

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{iat + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dH(x)\right\} \quad (4.28)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y H es una medida finita. El integrando se define en $x = 0$ por continuidad y su valor es $-t^2/2$.

Para presentar las ideas básicas de la prueba vamos a considerar un caso más simple, suponiendo que las variables tienen varianzas finitas. Haremos la demostración en dos partes.

Teorema 4.19 *Supongamos que la variable aleatoria X tiene segundo momento finito. Si X tiene distribución infinitamente divisible entonces su función característica es*

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{i\mu t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} dG(x)\right\} \quad (4.29)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y G es una medida finita. El integrando se define en $x = 0$ por continuidad y su valor es $-t^2/2$.

Antes de ver la demostración veamos tres casos particulares

Ejemplo 4.6

Si G solo tiene masa σ^2 en el origen, entonces (4.29) vale:

$$\exp\{i\mu t - \sigma^2 t^2/2\}$$

es la f.c. de una distribución normal con media μ y varianzas σ^2 .

Ejemplo 4.7

Si G tiene masa puntual λ en 1 y $\mu = \lambda$, entonces (4.29) vale

$$\exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$$

que es la f.c. de una distribución de Poisson de parámetro λ .

Supongamos que $\mu = 0$ y G tiene masa λx^2 en $x \neq 0$. Entonces (4.29) vale

$$\exp\{\lambda(e^{itx} - 1 - itx)\}$$

que es la función característica de $x(Z_\lambda - \lambda)$ con $Z_\lambda \sim Pois(\lambda)$. Por lo tanto (4.29) es la f.c. de una distribución F que es infinitamente divisible: tomamos como F_n la f.d. de $x(Z_{\lambda/n} - \lambda/n)$.

Ejemplo 4.8

Si $\varphi_j(t)$ es la función correspondiente a la fórmula (4.29) con $\mu = 0$ y medida G_j y si $G = \sum_{j=1}^k G_j$ entonces (4.29) corresponde a $\varphi_1(t) \cdots \varphi_k(t)$. Por los dos ejemplos anteriores vemos que si G consiste de una cantidad de masas puntuales finitas como las de los ejemplos anteriores, (4.29) es una f.c. Es fácil verificar en el ejemplo anterior que la distribución correspondiente a $\varphi(t)$ tiene media 0 y varianza $G(\mathbb{R})$, y como medias y varianzas (en el caso independiente) se suman, lo mismo es cierto en este ejemplo.

Antes de hacer la demostración del teorema recordemos algunos resultados sobre logaritmos de números complejos. Para un número complejo $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$ el logaritmo se define como $\log(z) = \text{Log}(r) + i\theta$, donde Log denota el logaritmo de un número real. El logaritmo es una función multivaluada para todos los $z \in \mathbb{C}$ salvo $z = 0$.

Si ϑ denota el valor principal de $\arg(z)$, es decir, es el valor que satisface $-\pi < \vartheta \leq \pi$, cualquier otro valor del argumento se puede escribir como $\theta = \vartheta + 2\pi n$ para $n \in \mathbb{Z}$. En consecuencia

$$\log(z) = \text{Log}(r) + i(\vartheta + 2\pi n) \quad n \in \mathbb{Z}$$

El *valor principal* de $\log(z)$ es el valor que se obtiene de la fórmula anterior con $n = 0$, y es el valor que usaremos en las demostraciones que siguen a continuación cuando tomemos el logaritmo de una función característica.

El logaritmo tiene el siguiente desarrollo en series de potencias para $|z| < 1$:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

y en particular, $\log(1-z) = -z + \mathcal{O}(1)$ cuando $|z| \rightarrow 0$.

Hemos visto que si $\varphi(t)$ es una f.c. infinitamente divisible, nunca se anula y es continua, y por lo tanto tiene un logaritmo continuo. Si pedimos que $\log \varphi(0) = \log 1 = 0$, el logaritmo queda determinado de manera única. Además, si $\varphi = \varphi_n^n$, donde φ_n es una f.c., entonces

$$\varphi_n^n = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \log \varphi\right) \right)^n$$

y por lo tanto

$$\varphi_n(t) = \exp\left(\frac{1}{n} \log \varphi(t)\right) \tag{4.30}$$

Demostración del Teorema 4.19. Si X es infinitamente divisible para cada n existen v.a.i. $(X_{n,k}, k = 1, \dots, n)$ con f.d. F_n y f.c. φ_n tales que $\varphi_X(t) = (\varphi_n(t))^n$. Además $\varphi_X \neq 0$ de modo que los logaritmos están bien definidos. Tenemos

$$\log \varphi_X(t) = n \log \varphi_n(t) = n \log(1 - (1 - \varphi_n(t))).$$

Pero para cualquier T , a partir de la ecuación (4.30) vemos que $\varphi_n(t) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, uniformemente en el intervalo $|t| < T$. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \log \varphi_X(t) &= n(\varphi_n(t) - 1) + \mathcal{O}(1) = n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) dF_n(x) + \mathcal{O}(1) \\ &= it \text{E}(X) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} nx^2 dF_n(x) + \mathcal{O}(1) \\ &= it \text{E}(X) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG_n(x) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$ donde

$$G_n(x) = n \int_{-\infty}^x t^2 dF_n(t)$$

Esta G_n es una f.d. generalizada, es decir, es no-decreciente y continua por la derecha con $G_n(-\infty) = 0$ y $G_n(\infty) = n E(X_{n,1}^2) = E(X^2)$.

Por el teorema de selección de Helly (T. 3.8) existe una subsucesión $(G_{n_k}, k \geq 1)$ que converge vagamente a G , de modo que para cualquier intervalo acotado $[a, b]$, con $a < 0 < b \in \mathcal{C}(G)$, usando el teorema 3.9 se tiene que

$$\int_a^b (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG_{n_k}(x) \rightarrow \int_a^b (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

Más aún, teniendo en cuenta que

$$\left| \frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \right| \leq \frac{2|t|}{|x|} \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

vemos que el integrando es una función que se anula en ∞ y por la caracterización de la convergencia vaga tenemos que

$$\log \varphi_X(t) = it E(X) + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG(x).$$

Esto demuestra el teorema e identifica a μ como $E(X)$. ■

Teorema 4.20 Si

$$\varphi(t) = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG(x) \right\} \quad (4.31)$$

donde G es una medida finita, entonces φ es una f.c. infinitamente divisible

Demostración.

Si G tiene masa λx^2 en x entonces

$$\varphi(t) = \exp \{ \lambda (e^{itx} - 1 - itx) \}$$

que es la f.c. de una transformación lineal de una distribución de Poisson: Si $Y \sim Pois(\lambda)$ entonces $\varphi(t)$ es la función característica de $\lambda(Y - x)$.

Definimos la medida $G_{n,k}$ como la medida discreta con masa $\alpha_{n,k} = G(k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ colocada en $k2^{-n}$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2^{2n}, n \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k}(t) &= \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG_{n,k}(x) \right\} \\ &= \exp \left\{ (e^{itk2^{-n}} - 1 - itk2^{-n}) \frac{\alpha_{n,k}}{(k2^{-n})^2} \right\} \end{aligned}$$

que es la f.c. de

$$\frac{\alpha_{n,k}}{(k2^{-n})^2} (Y - k2^{-n})$$

donde $Y \sim Pois(\alpha_{n,k}/k2^{-n})$.

Sea $Y_{n,k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2^{2n}, n \geq 1$ v.a.i. con f.c. $\varphi_{n,k}$ y sea $Y_n = \sum_k Y_{n,k}$, con f.c. φ_n con representación (4.31) con medida G_n que satisface $G_n = \sum_k G_{n,k}$. Las variables $Y_{n,k}$ son infinitamente divisibles por ser Poisson generalizadas y por lo tanto, también lo es Y_n . Es fácil ver que $G_n \xrightarrow{v} G$ cuando $n \rightarrow \infty$ y además $G_n(\mathbb{R}) \leq G(\mathbb{R}) < \infty$. De nuevo observamos que el integrando $(e^{itx} - 1 - itx)/x^2 \in \mathcal{C}_0$ y por lo tanto $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si demostramos que $\varphi(t)$ es continua en 0, por el teorema de

continuidad φ sería una f.c. y como es el límite de f.c. infinitamente divisibles, también sería infinitamente divisible.

Para ver que φ es continua en 0 queremos ver que $\varphi(h) \rightarrow 1$ cuando $h \rightarrow 0$ y esto equivale a ver que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{ihx} - 1 - ihx) \frac{1}{x^2} dG(x) \rightarrow 0$$

cuando $h \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ihx} - 1 - ihx) \frac{1}{x^2} dG(x) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| (e^{ihx} - 1 - ihx) \frac{1}{x^2} \right| dG(x) \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^2 x^2}{x^2} dG(x) = h^2 G(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

y esto tiende a 0 cuando $h \rightarrow 0$. Por lo tanto φ es una f.c. infinitamente divisible. \blacksquare

Proposición 4.2 *Si φ es una f.c. de la forma (4.31), la distribución correspondiente tiene media 0 y varianza $G(\mathbb{R})$.*

Demostración. Consideremos las variables $Y_n = \sum_k Y_{n,k}$ definidas en la demostración del teorema anterior. Por los comentarios del ejemplo 4.8 $\text{Var}(Y_{n,k}) = G_{n,k}(\mathbb{R})$ y $\text{Var}(Y_n) = G_n(\mathbb{R}) = \sum_k G_{n,k}(\mathbb{R})$, que satisfacen $G_n(\mathbb{R}) \leq G(\mathbb{R}) < \infty$. Por el teorema 3.6

$$E(Y^2) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E(Y_n^2) \leq \sup_n G_n(\mathbb{R}) \leq G(\mathbb{R}) < \infty,$$

de modo que la distribución límite tiene segundo momento finito. Usando la fórmula (3.32) para la función característica (4.31) obtenemos el resultado. \blacksquare

Corolario 4.2 *Si Y es una v.a. con f.c. (4.31) entonces $Y + \mu$ tiene f.c. (4.29). Recíprocamente, si Z tiene f.c. (4.29) entonces existe una v.a. infinitamente divisible Y tal que $Z = Y + \mu$ y por lo tanto Z es infinitamente divisible.*

Sabemos que los límites de f.c. infinitamente divisibles también son infinitamente divisibles. El siguiente teorema nos da condiciones para la convergencia.

Teorema 4.21 *Sean $Y_n, n \geq 1$ v.a. con varianzas finitas que corresponden a distribuciones infinitamente divisibles con f.c.*

$$\varphi_n(t) = \exp \left\{ i\mu_n t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG_n(x) \right\}.$$

Entonces

$$Y_n \xrightarrow{d} Y \quad y \quad \text{Var}(Y_n) \rightarrow \text{Var}(Y) \quad (n \rightarrow \infty),$$

donde

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ i\mu t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} dG(x) \right\}.$$

si y sólo si

$$G_n \xrightarrow{v} G, \quad G_n(\mathbb{R}) \rightarrow G(\mathbb{R}), \quad \mu_n \rightarrow \mu$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Las dos primeras condiciones equivaldrían a convergencia en distribución si la masa total fuese 1.