Ayudantía de Probabilidad Avanzada.
Solución de la tarea 5.
Henry Pantí.

16. (a) A partir de la definición es sencillo ver que $E(X_1) = 0$ y $E(X_1^2) = \infty$.

(b) Sea $Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq \sqrt{n}\log n\}}$. Entonces

$$\sum P(X_n \neq Y_n) = \sum P(|X_n| > \sqrt{n}\log n) = \sum \frac{1}{n(\log n)^2} < \infty.$$

Esto muestra que las sucesiones X_n y Y_n son tail equivalentes. Por lo tanto, es suficiente mostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{n\log n}} \sum_{k=1}^{n} Y_k \to \mathcal{N}(0,1). \tag{16.1}$$

Sea $s_n^2 = \sum_{k=1}^n E(Y_k^2)$. Para mostrar (16.1), vamos a verificar que $s_n^2 \sim n\log n$ y que la sucesión Y_n satisface la condición de Lyaponouv con $\delta = 1$. Ya que la v.a. X_n es simétrica, entonces Y_n también lo es, lo que implica $E(Y_n) = 0$. A partir de la definición se puede verificar que $E(Y_n^2) = 2\log(\sqrt{n}\log n)$. De esta forma, $s_n^2 = \sum_{k=1}^n 2\log(\sqrt{k}\log k) = \sum_{k=1}^n \log(k) + \sum_{k=1}^n 2\log(\log k) = s_{1,n}^2 + s_{2,n}^2$. Ahora bien,

$$0 \leq \frac{s_{2,n}^2}{n\log n} = \frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^n 2\log(\log k) \leq \frac{2\log(\log n)}{\log n} \to 0.$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{n}\log n! - \log n = \frac{1}{n}\log\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 \log(x)dx = -1.$$

De lo anterior se sigue que $\log(n!) \sim n\log(n)$. Usando esto se obtiene

$$\frac{1}{n\log n}s_{1,n}^2 = \frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^n \log k = \frac{\log n!}{n\log n} \to 1.$$

Esto último nos permite concluir que $s_n^2 \sim n\log n$.

Ahora veamos que Y_n satisface la condición de Lyapounov con $\delta = 1$. Con ayuda de $s_n^2 \sim n\log n$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^n E|Y_k|^3 &= \frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^n [2\sqrt{k}\log k - 1] \\
&\leq \frac{2n^{3/2}\log n}{s_n^3} \\
&= \frac{2}{(\log n)^{1/2}}\left(\frac{n\log n}{s_n^2}\right)^{3/2} \to 0.
\end{aligned}$$

Lo que muestra la condición de Lyapounov. Por lo tanto, por el TCL

$$\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \to \mathcal{N}(0,1).$$

Y ya que $s_n^2 \sim n\log n$, se concluye (16.1).

(c) Tenemos

$$U(t) = 2\log t.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U(tx)}{U(t)} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{\log x}{\log t}\right) = 1.$$

17. (a) Sea Y con densidad f dada por

$$f(y) = \frac{c}{|y|^3(\log|y|)^2}, \quad |y| > e,$$

donde c es una constante normalizadora. Tenemos

$$E(Y^2) = 2\int_e^{\infty}\frac{c}{y(\log y)^2}dy = 2c.$$

Además, ya que $E(Y^2)$ es finito, entonces $E(Y)$ es finito y como f es simétrica se obtiene $E(Y) = 0$. Ahora, sea $\delta > 0$. Ya que $\frac{|y|^\delta}{\log|y|} \to \infty$, cuando $|y| \to \infty$, entonces existe $y^* > 0$ tal que para toda $|y| \geq y^*$, se satisface

$$\frac{|y|^\delta}{\log|y|} \geq 1.$$

De aquí,

$$E|Y|^{2+\delta} = c\int_{|y|>e}\frac{|y|^\delta}{|y|(\log|y|)^2}dy \geq c\int_{|y|>y^*}\frac{1}{|y|(\log|y|)}dy = \infty.$$

(b) Por (a) se obtiene que la condición de Lyapounov no es válida. Ahora verificaremos la condición de Lindeberg. Dado $\epsilon > 0$, tenemos

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} E|X_k|^2\mathbf{1}_{\{|X_k|>\epsilon\sigma\sqrt{n}\}} = \int_{\epsilon\sigma\sqrt{n}}^{\infty}\frac{1}{x(\log x)^2}dx = \frac{1}{\log(\epsilon\sigma\sqrt{n})} \to 0,$$

cuando $n\to\infty$.

18. Usando la definición de f.c. y la linealidad del valor esperado, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n}\varphi(t_j-t_k)c_j\overline{c_k} &= E\left(\sum_{j,k=1}^{n} e^{it_jX}e^{-it_kX}c_j\overline{c_k}\right)\\ &= E\left|\sum_{j=1}^{n} e^{it_jX}c_j\right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

19. (a) La v.a. X es simétrica porque su f.c. toma valores en los reales.

(b) Para contestar esta pregunta, mostraremos que la f.c. de X es absolutamente integrable. Recordemos que si la f.c. de una v.a. es absolutmente integrable, entonces la v.a. tiene densidad, es decir, es una v.a. absolutamente continua.

Tenemos que $\varphi(t) \to 0$, cuando $t \to 0$. De aquí, existe $a > 0$ tal que $\varphi(t) \leq 1$, para $|t| \leq a$. Así,

$$\begin{aligned}\int |\varphi(t)|dt &= \int_{|t|\leq a} |\varphi(t)|dt + \int_{|t|>a} |\varphi(t)|dt \\ &= 2a + 3\left(\int_{|t|>a} \frac{1}{|t|^3}dt + \int_{|t|>a} \frac{1}{t^2}dt\right) \\ &= 2a + \frac{3}{a^2} + \frac{6}{a}.\end{aligned}$$

Esto muestra que φ es absolutamente integrable.

(c) Por (b), X tiene densidad. Sea f la densidad de la v.a. X. Con ayuda de la fórmula de inversión, teorema de Fubini e integración por partes, se obtienen las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}P(|X| \leq 1) &= \int_{|x|\leq 1} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \int_{|x|\leq 1} e^{-itx}dxdt \\ &= \frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(t)}{t}\left(\frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t^3}\right)dt \\ &= \frac{3}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(2t) - t\sin(2t)}{t^4}dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(2t)-t\sin(2t)}{t^3}\right)\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(2t) - 2t\cos(2t)}{t^3}dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(2t)-2t\cos(2t)}{t^2}\right)\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{2\sin(2t)}{t}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}du \\ &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(|X| > 1) = 0$.

(d) Recordemos que las funciones seno y coseno en series de Taylor están dadas por

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}. \tag{19.1}$$

Usando lo anterior y debido a que φ toma valores en los reales se obtiene

$$\varphi(t) = E[\cos(tX)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} E[X^{2n}]. \tag{19.2}$$

Ahora, usando las expresiones para seno y coseno dadas en (19.1), se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= 3\frac{\sin t - t\cos t}{t^3} \\ &= \frac{3}{t^3}\left(t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} - t - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\ &= 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{2(n-1)}}{(2n+1)(2n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}\frac{3}{(2n+1)(2n+3)}\end{aligned}$$

Comparando con (19.2) se sigue que $E[X^{2n}] = \frac{3}{(2n+1)(2n+3)}$.

Comentario. El inciso (c) se puede obtener a partir de (d). En efecto, observe que $E[X^{2n}] = \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Entonces

$$P(|X| > 1) = E[\mathbf{1}_{\{|X|>1\}}] \leq E[X^{2n}\mathbf{1}_{\{|X|>1\}}] = E[X^{2n}] \to 0.$$

20. Nótese que la v.a. ξ_n es una variable aleatoria mixta. La parte discreta de ξ_n está dada por $P(\xi_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ y ya que ξ_n es simétrica, entonces la densidad f de la parte absolutamente continua está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2n^2x^2}, \quad |x| > 1.$$

Ahora bien, ya que

$$\int_1^{\infty} x\frac{1}{2n^2x^2}dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{2n^2x^2}dx = \infty,$$

se sigue que el valor esperado de ξ_n no existe (al igual que la varianza).

Ahora mostraremos que $\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^n (X_k + \xi_k) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. Para ello, vamos a mostrar que que $\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{c.s.} 0$. Por definición de ξ_n, tenemos

$$\sum_n P(X_n + \xi_n \neq X_n) = \sum_n P(\xi_n \neq 0) = \sum_n [1 - P(\xi_n = 0)] = \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty.$$

De aquí, se sigue que $X_n + \xi_n$ y X_n son tail equivalentes. Por lo tanto,

$$\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^n \xi_k = \frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^n [(X_k + \xi_k) - X_k] \overset{c.s.}{\to} 0.$$