Ayudantía deProbabilidad Avanzada.
Solución de la tarea 2.
Henry Pantí.

4. Ya que $1/p + 1/q = 1$, entonces para cualesquiera a, b positivos se satisface

$$ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q.$$

De aquí,

$$|X_nY_n| \leq p^{-1}|X_n|^p + q^{-1}|Y_n|^q.$$

Ya que $(|X_n|^p)$ y $(|Y_n|^p)$ son u.i. se tiene que $(p^{-1}|X_n|^p + q^{-1}|Y_n|^q)$ también lo es. Por lo tanto, (X_nY_n) es u.i.

6. Mostraremos solamente que $X_n \to X$ en L^1, la convergencia de las medias se sigue del ejercicio 13 b) de la lista 2. Tenemos

$$E(|X_n|) \leq E(Y_n) \leq \sup_n E(Y_n) < \infty,$$

ya que $E(Y_n)$ es una sucesión convergente. Entonces, $X_n \in L^1$, $n \geq 1$. Además, usando $|X_n| \leq Y_n$ y el lema de Fatou:

$$E|X| \leq \liminf E(Y_n) \leq \sup_n E(Y_n).$$

Lo que muestra que $X \in L^1$. Para mostrar que X_n converge a X en L^1, considere la sucesión (Z_n) dada por $Z_n = Y + Y_n - |X_n - X|$, $n \geq 1$. Ya que $|X_n| \leq Y_n$ y $|X| \leq Y$, se sigue que $Z_n \geq 0$, $n \geq 1$. Además, $Z_n \to 2Y$ c.s. Usando de nuevo el lema de Fatou obtenemos

$$E(2Y) = E(\liminf_{n\to\infty} Z_n) \leq \liminf_{n\to\infty} E(Z_n) = 2E(Y) - \limsup_{n\to\infty} E|X_n - X|,$$

de donde

$$\limsup_{n\to\infty} E|X_n - X| \leq 0.$$

Lo que muesttra que X_n converge a X en L^1.

13. (a) Mostraremos que si $X_n \to 0$ en probabilidad entonces para cualquier $p > 0$,

$$\frac{|X_n|^p}{1 + |X_n|^p} \to 0 \quad \text{en probabilidad} \tag{1}$$

y

$$E\left(\frac{|X_n|^p}{1 + |X_n|^p}\right) \to 0. \tag{2}$$

Defina $h(x) = \frac{x^p}{1+x^p}$, $x \geq 0$. Ya que h es continua, se obtiene inmediatamente que $h(|X_n|) \to h(0) = 0$ en probabilidad. Lo que muestra (1). Para obtener (2), observe que $h(x) \leq 1$, $x \geq 0$. Esto implica que la sucesión $(h(|X_n|))$ es u.i. y como $h(X_n) \to 0$ en probabilidad, entonces $h(|X_n|) \to 0$ en L^1, esto es (2).

(b) Escriba $h(x) = 1 - \frac{1}{1+x^p}$, $x \geq 0$. De aquí se obtiene que $h(x)$ es creciente. Además, $h(x) > 0$, para $x > 0$. Entonces para toda $\epsilon > 0$,

$$P(|X_n| > \epsilon) \leq P(h(|X_n|) > h(\epsilon)) \to 0.$$

(c) En (a) se probó que si $X_n \to 0$ en probabilidad entonces (2) es válido. Ahora, supongamos que (2) es válido. La ecuación (2) significa que $h(X_n) \to 0$ en L^1 y de aquí en probabilidad, luego por (b), $|X_n| \to 0$ en probabilidad.

14. (a) Tenemos

$$E(X_n) = \frac{n}{\log n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\log n} \to 0.$$

También para $\alpha > 0$,

$$E(|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>\alpha\}}) = \begin{cases} \frac{1}{\log n} & \text{si } \frac{n}{\log n} > \alpha, \\ \\ 0 & \text{si } \frac{n}{\log n} \leq \alpha. \end{cases}$$

Ya que $1/\log x$ es decreciente y $x/\log x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, entonces

$$\sup_n E(|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>\alpha\}}) \leq \frac{1}{\log \alpha} \to 0,$$

cuando $\alpha \to \infty$.
Supongamos que existe variable aleatoria Y tal que $X_n \leq Y$, para toda n. Entonces $Y(\omega) \geq n/\log n$ para toda $\omega \in (0, 1/n)$ y

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left(Y\mathbf{1}_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}\right) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\log n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log n} = \infty. \end{aligned}$$

Lo que contradice que Y es integrable.

(b) Tenemos $E(X_n) = 0$, para toda n, entonces $E(X_n) \to 0$. Ahora, dado $\epsilon > 0$, tenemos

$$P(|X_n| > \epsilon) \leq \frac{2}{n} \to 0.$$

Finalmente,

$$E(|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>\alpha\}}) = \begin{cases} 2 & \text{si } n > \alpha, \\ \\ 0 & \text{si } n \leq \alpha. \end{cases}$$

Y de esta forma, $\sup_n E(|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>\alpha\}}) = 2$, lo que muestra que $\{X_n, n \geq 1\}$ no es u.i.

17. (a) Sea x un punto de continuidad de F_X, la distribución de la variable aleatoria X. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$|F_{X_n}(x) - F_X(x)| < \epsilon, \quad \forall\, n \geq M.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}|F_{X_{N_k}}(x) - F_X(x)| &\leq \sum_n |F_{X_n}(x) - F_X(x)| P(N_k = n) \\ &\leq 2MP(N_k < M) + \epsilon P(N_k \geq M).\end{aligned}$$

Ya que $N_k \to \infty$ en probabilidad cuando $k \to \infty$, se sigue

$$\liminf_{k\to\infty} |F_{X_{N_k}}(x) - F_X(x)| \leq \epsilon.$$

De aquí, $X_{N_k} \to X$ en distribución cuando $k \to \infty$.

(b) Sea $Y_n = \sup_{m\geq n} |X_m - X|$. Sabemos que $X_n \to X$ c.s. si y sólo si $Y_n \to 0$ en probabilidad (ejercicio 2 de la lista 2). Ahora bien, para $\epsilon > 0$, $n \geq 1$ se satisface

$$\begin{aligned}P(|X_{N_k} - X| > \epsilon) &= P(|X_{N_k} - X| > \epsilon, N_k < n) + P(|X_{N_k} - X| > \epsilon, N_k \geq n) \\ &\leq P(N_k < n) + P(Y_n > \epsilon).\end{aligned}$$

Haciendo $k \to \infty$ y luego $n \to \infty$ se sigue $\lim_{k\to\infty} P(|X_{N_k} - X| > \epsilon) = 0$. Lo que muestra el resultado.