Ayudantía de Probabilidad Avanzada.
Solución de la tarea 1.
Henry Pantí.

3. Tenemos

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \text{ es sucesión de Cauchy } \} \\ &= \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n,m\geq N} \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X_m(\omega)| < 1/k\}. \end{aligned}$$

De aquí, $A \in \mathcal{F}$. Ahora, sea $X = \mathbf{1}_A \lim_{n\to\infty} X_n$, entonces $X_n(\omega) \to X(\omega)$ para $\omega \in A$.

7. Suponga que $X \in L^1$, A y A_n eventos.

a) Tenemos que $X_n = |X|\mathbf{1}_{\{|X|\leq n\}} \to |X|$ cuando $n \to \infty$. Y ya que $|X_n| \leq |X|$ y $X \in L^1$, el teorema de convergencia dominada asegura:

$$\int_{\{|X|\leq n\}} |X| dP \to \int |X| dP,$$

cuando $n \to \infty$. Entonces

$$0 \leq \left| \int_{\{|X|>n\}} X dP \right| \leq \int_{\{|X|>n\}} |X| dP = \int |X| dP - \int_{\{|X|\leq n\}} |X| dP \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

b) Sea $\epsilon > 0$. Por a), existe M tal que $\int_{\{|X|>M\}} |X| dP < \epsilon$. Entonces,

$$\int_{A_n} |X| dP = \int_{A_n \cap \{|X|\leq M\}} |X| dP + \int_{A_n \cap \{|X|>M\}} |X| dP \leq M P(A_n) + \epsilon.$$

Ya que $P(A_n) \to 0$, cuando $n \to \infty$, se sigue

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{A_n} |X| dP \leq \epsilon.$$

De aquí se obtiene el resultado.

c) Recordemos que para todo $A \in \mathcal{F}$, $\int_A |X| dP = \int_{A\cap\{|X|>0\}} |X| dP$. Por (a), si $P(A \cap \{|X| > 0\}) = 0$, entonces $\int_A |X| dP = 0$.

Supongamos ahora que $\int_A |X| dP = 0$. Sean $B_n = \{\omega \in \Omega : |X(\omega)| > 1/n\}$, $n \geq 1$. Tenemos que $B_n \uparrow \cup_{n\geq 1} B_n = \{|X| > 0\}$, entonces

$$0 = \int_A |X| dP = \int_{A\cap\{|X|>0\}} |X| dP \geq \int_{A\cap B_n} |X| dP \geq \frac{1}{n} P(A \cap B_n),$$

para toda $n \geq 1$. De aquí, $P(A \cap \{|X| > 0\}) = \lim_{n\to\infty} P(A \cap B_n) = 0$.

d) Tenemos

$$\int (X - E(X))^2 dP = \mathrm{Var}(X) = 0,$$

entonces por (c), $P((X - E(X))^2 > 0) = 0$ o bien $P(X = E(X)) = 1$.

e) Se puede mostrar que para $A, B \in \mathcal{F}$:

$$\mathbf{1}_{A\triangle B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|\,.$$

Usando la relación anterior y b) tenemos

$$\left|\int_{A_n} X dP - \int_A X dP\right| \leq \int_{A_n \triangle A} |X| dP \to 0,$$

cuando $P(A_n \triangle A) = d(A_n, A) \to 0$.

10. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{X_n\}$ es creciente. Sea $A_{n,k}$ los conjuntos dados por

$$A_{n,k} = \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < 1/k\}, \quad n, k \geq 1.$$

Tenemos que

$$\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} A_{n,k} = \bigcap_{k\geq 1} \liminf_{n\to\infty} A_{n,k}.$$

Ahora bien, como $\{X_n\}$ es creciente, entonces para cada k, $\{A_{n,k}\}$ es creciente. Además, ya que $X_n \to X$ en probabilidad, también se tiene que $\lim_{n\to\infty} P(A_{n,k}) = 1$, para cada k. De lo anterior, se sigue que para todo k,

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_{n,k}) = \lim_{n\to\infty} P(A_{n,k}) = 1.$$

Por lo tanto, $P(X_n \to X) = 1$. En otras palabras, $X_n \to X$ c.s.

13. (a) Mostrar que $E|X_n|^p \to E|X|^p$ es equivalente a probar que $||X_n||_p \to ||X||_p$. Ahora bien, ya que $||\cdot||$ es una norma en L^p, se satisface

$$|||X_n||_p - ||X||_p| \leq ||X_n - X||_p.$$

Ya que $X_n \to X$ en L^p ($||X_n - X||_p \to 0$, cuando $n \to \infty$), el resultado se sigue.

(b) Como $X_n \to X$ en L^1, $E|X_n - X| \to 0$. De aquí,

$$|E(X_n) - E(X)| = |E(X_n - X)| \leq E|X_n - X| \to 0.$$

Lo que muestra (b).

Para mostrar que el recíproco es falso, considere la sucesión de v.a. $\{X_n\}$ definidas por

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Sea $X = 0$, entonces $E(X_n) \to E(X)$, pero $E|X_n - X| = 1$.

(c) Primero observemos que

$$E|X_n - X| = ||X_n - X||_1 \leq ||X_n - X||_2.$$

De aquí, $X_n \to X$ en L^1. Usando (b), se afirma que $E(X_n)^2 \to E(X)^2$. Por otro lado, por (a), $E(X_n^2) \to E(X^2)$. Por lo tanto,

$$\mathrm{Var}(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 \to E(X^2) - E(X)^2 = \mathrm{Var}(X).$$

26. Recordemos que para cualquier sucesión de números reales $\{a_n\}$, si $a_n \to a$ entonces $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \to a$, cuando $n \to \infty$. Usaremos este hecho en los incisos (a) y (b).

a) Sea $\Omega' = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to 0\}$. Entonces por la nota, para cada $\omega \in \Omega'$, $\frac{S_n(\omega)}{n} \to 0$. Esto prueba el resultado.

b) Usando de nuevo la nota y la desigualdad de Minkowski, tenemos

$$\left|\left|\frac{S_n}{n}\right|\right|_p \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n ||X_k||_p \to 0.$$

Esto prueba (b).

c) Sea $((0,1]\mathbf{B}((0,1]), m)$, m medida de Lebesgue. Defina $\{X_n\}$ por

$$\begin{aligned}
&X_1 = 2\cdot \mathbf{1}_{(0,1/2]}, \quad X_2 = 2\cdot \mathbf{1}_{(1/2,1]},\\
&X_3 = 3\cdot \mathbf{1}_{(0,1/3]}, \quad X_4 = 3\cdot \mathbf{1}_{(1/3,2/3]}, \quad X_5 = 3\cdot \mathbf{1}_{(2/3,1]},\\
&X_6 = 4\cdot \mathbf{1}_{(0,1/4]}, \quad X_7 = 4\cdot \mathbf{1}_{(1/4,2/4]}, \quad X_8 = 4\cdot \mathbf{1}_{(2/4,3/4]}, \quad X_9 = 4\cdot \mathbf{1}_{(3/4,1]},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Entonces $X_n \to 0$ en probabilidad, pero

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(X_1 + X_2) &= 1,\\
\frac{1}{5}(X_1 + \cdots + X_5) &= 1\\
\frac{1}{9}(X_1 + \cdots + X_9) &= 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

d) Escriba

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{S_{n-1}}{n-1} \to 0 - (1)\cdot 0 = 0,$$

en probabilidad.