Probabilidad Avanzada I
Problemas 8

Los problemas 9, 13, 16, 17 y 19 son para entregar el jueves 03/05/12.

1. Sea X una v.a. en $\mathbb{R}^n$ y sea Y una v.a. con valores en $\mathbb{R}$. Demuestre que X es medible respecto a $\sigma(X)$ si y sólo si existe una función Borel-medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $Y = f(X)$.

2. Sea Y una v.a. con varianza finita y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra. Demuestre que $\mathrm{E}(Y - \mathrm{E}(Y|\mathcal{G}))^2 = \mathrm{E}\,Y^2 - \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})))^2$.

3. Sea $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P))$ y sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Definimos la esperanza condicional de Y dada $\mathcal{G}$ como el único elemento ξ de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P))$ tal que $\mathrm{E}(\xi Z) = E(YZ) \quad \forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

   (i) Demuestre que para variables en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, esta definición coincide con la que dimos en clase. (Observación: La unicidad se refiere a clases de equivalencia en el sentido usual).

   (ii) Usando un argumento de truncación demuestre que la definición puede extenderse a $Y \in L^+(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la clase de variables no-negativas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Demuestre además que si $0 \leq Y \leq Y'$ entonces $\mathrm{E}(Y|\mathcal{G}) \leq \mathrm{E}(Y'|\mathcal{G})$.

   (iii) Extienda la definición a variables $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

4. Demuestre las siguientes proposiciones

   (i) $\mathrm{E}(Y|Y) = Y$ c.s.

   (ii) Si $|X| \leq k$ c.s. entonces $|\,\mathrm{E}(X|\mathcal{G})| \leq k$ c.s.

   (iii) Si $X \in L^2$ y Y es una v.a. tal que $\mathrm{E}(X|Y) = Y$ c.s. y $\mathrm{E}(Y|X) = X$ c.s. entonces $X = Y$ c.s.

   (iv) Sea $\mathcal{G}_1,\ \mathcal{G}_2$ σ-álgebras de eventos y $X \in L^1$. Si $X_1 = \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1)$, $X_2 = \mathrm{E}(X_1|\mathcal{G}_2)$ y $X = X_2$ c.s. entonces $X_1 = X_2$ c.s.

   (v) Si $X, Y \in L^1$ con $\mathrm{E}(X|Y) = Y$ c.s. y $\mathrm{E}(Y|X) = X$ c.s. entonces $X = Y$ c.s.

5. Sea $Y \in L^2(\Omega)$ y suponga que $\mathrm{E}(Y^2|X) = X^2$ y $\mathrm{E}(Y|X) = X$. Demuestre que $Y = X$ c.s.

6. Sean X, Y v.a. con segundos momentos finitos tales que para alguna función decreciente f se tiene $\mathrm{E}(X|Y) = f(Y)$. Demuestre que $\mathrm{Cov}(X, Y) \leq 0$.

7. (Cauchy-Schwarz) Para $X, Y \in L^2$ demuestre que $(\mathrm{E}(XY|\mathcal{G}))^2 \leq \mathrm{E}(X^2|\mathcal{G})\,\mathrm{E}(Y^2|\mathcal{G})$.

8. Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Suponga que $\mathcal{H}$ es independiente de $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$. Demuestre que $\mathrm{E}(X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = \mathrm{E}(X|\mathcal{G})$.

9. Si $X \in L^1$, $Y \in L^\infty$ y $\mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, demuestre que $\mathrm{E}(Y\,\mathrm{E}(X|\mathcal{G})) = \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(Y|\mathcal{G}))$.

10. Sea $\{N(t),\ t \geq 0\}$ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad λ. Halle $\mathrm{E}(N(s)|N(t))$ para $0 \leq s < t$.

11. Si U tiene distribución $U(0,1)$ en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definimos $Y = U(1-U)$. Si X es una variable positiva, halle $\mathrm{E}(X|Y)$.

12. Para $0 \leq X \in L^1$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, demuestre que c.s.

$$\mathrm{E}(X|\mathcal{G}) = \int_0^\infty P(X > t|\mathcal{G})\,dt$$

13. Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ y X tiene segundo momento finito, demuestre que

$$\mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_2))^2\right) \leq \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X|\mathcal{G}_1))^2\right)$$

    ¿Cómo se interpreta este resultado?

14. Sea Y una v.a. en L^1. Demuestre que $\{\mathrm{E}(Y|\mathcal{G}) : \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ es una sub-σ-álgebra $\}$ es uniformemente integrable.

15. Sea (X, Y) v.a. centradas con distribución conjunta gaussiana de varianzas σ_1^2 y σ_2^2 y covarianza ρ. Halle $\mathrm{E}(X|Y)$ y $\mathrm{Var}(X|Y)$.

16. Suponga que X_1, X_2 son variables i.i.d. exponenciales de parámetro 1. Halle

    (i) $\mathrm{E}(X_1|X_1+X_2)$. (ii) $P(X_1<3|X_1+X_2)$. (iii) $\mathrm{E}(X_1|X_1\wedge t)$. (iv) $\mathrm{E}(X_1|X_1\vee t)$.

17. (Desigualdad de Chebyshev) Demuestre que para $X\in L^2$ y $a>0$, $P(|X|\geq a|\mathcal{G})\leq \frac{1}{a^2}\,\mathrm{E}(X^2|\mathcal{G})$. Generalice el resultado anterior para cualquier potencia k en lugar de 2.

18. Sea X e Y v.a. con varianza finita, sea g una función a valores reales tal que $\mathrm{E}(g(X))^2<\infty$ y sea $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra. Demuestre que $\mathrm{E}(Y-g(X))^2=\mathrm{E}[\mathrm{Var}(Y|\mathcal{G})]+\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})-g(X))^2\geq \mathrm{E}[\mathrm{Var}(Y|\mathcal{G})]$, y se obtiene una igualdad para $g(X)=\mathrm{E}(Y|\mathcal{G})$. (Definimos $\mathrm{Var}(X|\mathcal{G})=\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G}]$. Demuestre también que $\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{E}[\mathrm{Var}(Y|\mathcal{G})]+\mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y|\mathcal{G}))$.

19. Sean X,Y v.a.i. y sea f una función medible tal que $f(X,Y)$ es integrable. Definimos

$$g(x)=\begin{cases}\mathrm{E}(f(x,Y)), & \text{si } \mathrm{E}\,|(f(x,Y))|<\infty,\\ 0 & \text{si no.}\end{cases}$$

    Demuestre que g es medible en $\mathbb{R}$ y que $\mathrm{E}(f(X,Y)|X)=g(X)$.

20. En clase vimos que si $\mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ y llamamos $L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$ al subespacio de elementos de $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ que son $\mathcal{G}$-medibles, la esperanza condicional $\mathrm{E}(X|\mathcal{G})$ es la proyección de X en el subespacio $L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$. Suponga ahora que $\mathcal{G}=\sigma(Z)$ para alguna $Z\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Sea S_Z el subespacio de dimensión 1 generado por Z. Demuestre que S_Z puede ser mucho más pequeño que $L^2(\Omega,\mathcal{G},P)$ de modo que $\mathrm{E}(X|Z)$ no es la proyección de X sobre Z.

21. (i) Sean $a,b>0$ y $\{(X_n^{(i)},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ submartingalas para $i=1,2$. Demuestre que $\{(aX_n^{(1)}+bX_n^{(2)},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ y $\{(\max\{X_n^{(1)},X_n^{(2)}\},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ son submartingalas.

    (ii) Sean $a,b>0$ y $\{(X_n^{(i)},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ supermartingalas para $i=1,2$. Demuestre que $\{(aX_n^{(1)}+bX_n^{(2)},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ y $\{(\min\{X_n^{(1)},X_n^{(2)}\},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ son supermartingalas.

    (iii) Sean $a,b\in\mathbb{R}$ y suponga que $\{(X_n^{(1)},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una martingala, y que $\{(X_n^{(2)},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una submartingala. Demuestre que $\{(aX_n^{(1)}+bX_n^{(2)},\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una submartingala para $b>0$ y una supermartingala para $b<0$.

22. (i) Si $\{(X_n,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una martingala, entonces $\{(X_n^+,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$, $\{(X_n^-,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ y $\{(|X_n|,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ son submartingalas.

    (ii) Si $\{(X_n,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una martingala y $\mathrm{E}\,|X_n|^p<\infty$ para todo n y algún $p>1$, entonces $\{(|X_n|^p,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una submartingala.

    (iii) Si $\{(X_n,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una submartingala, también lo es $\{(X_n^+,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$.

    (iv) Si $\{(X_n,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una submartingala no-negativa y $\mathrm{E}\,|X_n|^p<\infty$ para todo n y algún $p\geq 1$, entonces $\{(|X_n|^p,\mathcal{F}_n),\ n\geq 0\}$ es una submartingala.

23. Considere el ejemplo 4.10 (doble o nada). Demuestre que la duración esperada del juego es 2, el valor esperado de la cantidad de dinero gastada en el momento del primer éxito es infinito y la ganancia total al terminar el juego es 1.

24. Sea T un tiempo de paro. Si $T\equiv n$ demuestre que $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}_n$.

25. Demuestre que T es un tiempo de paro si y sólo si $\{T=n\}\in\mathcal{F}_n$ para todo $n\geq 0$.

26. Sea T un tiempo de paro, $\Lambda\in\mathcal{F}_T$ y defina

$$T_\Lambda(\omega)=\begin{cases}T(\omega) & \text{si } \omega\in\Lambda,\\ \infty & \text{si } \omega\notin\Lambda.\end{cases}$$

    Demuestre que T_Λ es otro tiempo de paro.

27. Demuestre que T es $\mathcal{F}_T$-medible.