Probabilidad Avanzada I
Problemas 7

Los problemas 1, 5, 10, 15 y 18 son para entregar el viernes 17/04/12.

1. Para cualquier sucesión (X_n) de v.a., si X_n/b_n converge en distribución para una sucesión creciente de constantes b_n, demuestre que X_n/β_n converge en probabilidad a 0 si $b_n = o(\beta_n)$. En particular explique con precisión por qué el TCL implica la ley débil de grandes números.

2. Demuestre que para $x \geq 0$ cuando $n \to \infty$,
$$\sum_{k:|k-n/2|\leq (x\sqrt{n})/2} \binom{n}{k} \sim 2^n \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$
$$\sum_{k:|k-n|\leq x\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} \sim e^n \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

3. Sea $X \sim \Gamma(1, s)$ y, dado que $X = x$ sea Y una v.a. con distribución de Poisson de parámetro x. Halle la f.c. de Y y demuestre que, cuando $s \to \infty$,
$$\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

4. Si X_n tiene distribución geométrica con parámetro $p = \lambda/n$, demuestre que la distribución de X_n/n converge a una distribución exponencial.

5. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i. con distribución de Bernoulli simétrica. Demuestre que
$$\left(\frac{3}{n^3}\right)^{1/2} \sum_{k=1}^{n} kX_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

6. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i. con distribución de Bernoulli $Be(p_n)$ para $n \geq 1$. Sean $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $m_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$ y $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k(1 - p_k)$ para $n \geq 1$. Demuestre que
$$\frac{S_n - m_n}{s_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (n \to \infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n(1 - p_n) = \infty$$

7. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i. con distribución uniforme $\mathcal{U}(-1, 1)$ para $n \geq 1$. Sea m_k una sucesión creciente de enteros positivos y sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^{m_k}$ para $n \geq 1$. Demuestre que
$$\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (n \to \infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} = \infty$$

8. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i. con
$$P(X_k = k^\alpha) = P(X_k = -k^\alpha) = 1/2, \quad k \geq 1,$$
donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que el Teorema Central del Límite vale si y sólo si $\alpha \geq -1/2$.

9. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i. con distribución uniforme $\mathcal{U}(-k^\alpha, k^\alpha)$ para $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine la distribución límite (cuando exista) de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ con una normalización adecuada, cuando $n \to \infty$.

10. Esta es una extensión del TCL de Lyapunov. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i. con media 0 y sea g una función no-negativa y no-decreciente tal que $g(x)/x^2 \to +\infty$ cuando $x \to \infty$ y tal que $\mathrm{E}(g(X_n)) < \infty$ para todo n. Finalmente sean $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ y $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} var(X_k)$ para $n \geq 1$. Demuestre que si, para todo $\varepsilon > 0$,
$$\frac{1}{g(\varepsilon s_n)} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(g(X_k)) \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$
entonces
$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{cuando } n \to \infty.$$
Demuestre que este resultado es realmente una extensión del teorema de Lyapunov.

11. Suponga que para cualesquiera $a > 0, a' > 0, b \in \mathbb{R}, b' \in \mathbb{R}$ existen $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ tales que para la f.d. F se tiene que $F(ax + b) * F(a'x + b') = F(\alpha x + \beta)$. Demuestre que F es estable.

12. Suponga que X es estrictamente estable con índice $\alpha \in (0, 2)$, Y es no-negativa y estable con índice $\beta \in (0, 1)$. Demuestre que $XY^{1/\alpha}$ es estable con índice $\alpha\beta$.

13. Sea X una v.a. estable con índice $\alpha \in (0, 2)$ y sea Y una v.a. de Bernoulli simétrica e independiente de X. Demuestre que XY es estrictamente estable.

14. Demuestre que la distribución de Poisson es infinitamente divisible pero no estable.

15. Sea G una medida finita y sea

$$\varphi(t) = \exp\left\{i\mu t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\, dG(x)\right\} \tag{1}$$

donde el integrado vale $-t^2/2$ en 0. Demuestre que φ es la función característica de una distribución infinitamente divisible.

16. Demuestre que la distribución de Cauchy (con f.c. $e^{-|t|}$) corresponde a la fórmula (1) con $\mu = 0$ y G una medida con densidad $1/\pi(1 + x^2)$ respecto de la medida de Lebesgue.

17. Sea X una v.a. con distribución geométrica de parámetro p ($P(X = k) = q^{k-1}p$ para $k \geq 1$). Halle la función característica de esta distribución y demuestre que es infinitamente divisible.

18. Demuestre que la distribución uniforme $\mathcal{U}(-1, 1)$ no es infinitamente divisible.

19. Si $\lambda \geq 0$ y φ es una función característica, demuestre que $\exp\{\lambda(\varphi - 1)\}$ es una función característica infinitamente divisible.

20. ¿Es cierto que la combinación convexa de funciones características infinitamente divisibles también es infinitamente divisible?

21. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i. i.d. independientes de $N \sim Pois(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{N} X_k$ es infinitamente divisible.