Probabilidad Avanzada I

Problemas 3

Los problemas 4, 6, 13, 14 y 17 deben entregarse el martes 21/02/12.

1. Sea X_n $n \geq 1$ una sucesión de v.a. y g una función no-negativa y no-decreciente tal que $g(x)/x \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Si $\sup_n \mathrm{E}[g(X_n)] < \infty$ demuestre que (X_n) es uniformmente integrable (u.i.).

2. Sea X_n $n \geq 1$ una sucesión de v.a. tales que $|X_n| \leq Y_n$ c.s. para todo n, donde las Y_n son v.a. positivas e integrables. Si (Y_n) es u.i., demuestre que (X_n) también lo es.

3. Sean (X_n) y (Y_n) sucesiones de v.a. u.i. Demuestre que $(X_n + Y_n)$ también es u.i.

4. Sea $p, q > 1$ tales que $1/p + 1/q = 1$. Si $(|X_n|^p)$ y $(|Y_n|^q)$ son u.i., demuestre que $(X_n Y_n)$ también es u.i.

5. Sea $p \geq 1$ y $X_n \in L^p$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

   (a) (X_n) converge en L^p. (b) (X_n) converge en probabilidad y $(|X_n|^p)$ es u.i.

6. **Lemma de Pratt**. Sean X_n $n \geq 1$ y X v.a. y suponga que $X_n \to X$ c.s. cuando $n \to \infty$ y además que $|X_n| \leq Y_n$ para todo n, $Y_n \to Y$ c.s. y $\mathrm{E}(Y_n) \to \mathrm{E}(Y)$ cuando $n \to \infty$. Entonces $X_n \to X$ en L^1 y $\mathrm{E}(X_N) \to \mathrm{E}(X)$ cuando $n \to \infty$. (Observe que $Y_n = Y$ para todo n tenemos el Teorema de Convergencia Dominada).

7. Use el lema de Pratt para verificar que si $X_n \to X$ c.s. y $\mathrm{E}(X_n) \to \mathrm{E}(X)$ cuando $n \to \infty$ entonces para cualquier conjunto medible A,

   $$X\mathbf{1}_A \stackrel{c.s.}{\to} X\mathbf{1}_A, \qquad \mathrm{E}(X\mathbf{1}_A) \to \mathrm{E}(X\mathbf{1}_A)$$

   En particular el resultado es cierto si tomamos $A = \{|X| > a\}$ para cualquier a positivo.

8. Si (X_n) es u.i. entonces la sucesión $(\frac{1}{n}\sum_1^n X_j)$ para $n \geq 1$ también es u.i.

9. Sea (X_n) u.i. y sea $X \in L^1$. Demuestre que $(X_n - X)$ es u.i.

10. Sea (X_n) una sucesión i.i.d. Demuestre que $(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i)$ es u.i. siempre que $X_i \in L^1$.

11. Demuestre que $X_n \to 0$ en probabilidad si y sólo si $\mathrm{E}\left(|X_n|/(1+|X_n|)\right) \to 0$. Además, el funcional definido por

    $$\rho(X,Y) = \mathrm{E}\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right)$$

    es una métrica en el espacio de la v.a.'s si identicamos las variables que son iguales c.s.

12. Sea $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n)$. ¿Bajo qué condiciones es (X_n) u.i.?

13. Sea (X_n) una sucesión de v.a.

    (a) Si $X_n \to 0$ en probabilidad entonces para cualquier $p > 0$,

    $$\frac{|X_n|^p}{1+|X_n|^p} \to 0 \quad \text{en probabilidad} \tag{1}$$

    y

    $$\mathrm{E}\left(\frac{|X_n|^p}{|+|X_n|^p}\right) \to 0. \tag{2}$$

    (b) Si para algún $p > 0$ (1) vale, entonces $X_n \to 0$ en probabilidad.

    (c) Sea $p > 0$. Demuestre que $X_n \to 0$ en probabilidad si y sólo si (2) vale.

14. Considere el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}[0,1], m)$ donde m es la medida de Lebesgue.

(a) Demuestre que la siguiente sucesión de variables es u.i. y $\mathrm{E}(X_n) \to 0$ pero no existe Y integrable tal que $|X_n| < Y$ para todo n:

$$X_n = \frac{n}{\log n} \nVdash_{(0,n^{-1})}$$

(b) Definimos $X_n = n\mathbf{1}_{(0,n^{-1})} - n\mathbf{1}_{(n^{-1},2n^{-1})}$. Demuestre que X_n no es u.i. pero $X_n \to 0$ en probabilidad y $\mathrm{E}(X_n) \to 0$.

15. Sea X una v.a. en L^1; definimos $N : [1,\infty] \to [0,\infty]$ por $N(p) = ||X||_p$. Sea $p_0 = \sup\{p \geq 1 : ||X||_p < \infty\}$. Demuestre que N es continua en $[1, p_0)$. Demuestre también que la función continua $p \mapsto \log ||X||_p$ definida en $[1, p_0)$ es convexa.

16. Sea (X_n) una sucesión de v.a.i.i.d. y sea $M_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$

(a) Verifique que $P(M_n > x) \leq nP(X_1 > x)$.

(b) Si $\mathrm{E}(X_1^p) < \infty$ entonces $M_n/n^{1/p} \to 0$ en probabilidad.

(c) Si además las variables son no-negativas, demuestre que $M_n/n \to 0$ en probabilidad si y sólo si $nP(X_1 > n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

17. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. y sean $N_1, N_2, \ldots$ v.a. que toman valores en los enteros positivos y satisfacen $N_k \to \infty$ en probabilidad cuando $k \to \infty$. Demuestre:

(a) Si $X_n \to X$ en distribución y las X_n son independientes de las N_k, entonces $X_{N_k} \to X$ en distribución cuando $k \to \infty$.

(b) Si $X_n \to X$ c.s. entonces $X_{N_k} \to X$ en probabilidad cuando $k \to \infty$.

18. **Distancia en Variación Total**. La distancia en variación total $d_{TV}(X,Y)$ entre dos variables aleatorias X, Y se define como

$$d_{TV}(X,Y) = \sup_{u:||u||_\infty = 1} |\,\mathrm{E}(u(X)) - \mathrm{E}(u(Y))|$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones medibles $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $||u||_\infty = \sup_x |u(x)| = 1$.

(a) Si X e Y son discretas con funciones de probabilidad p_n y q_n en los puntos x_n, demuestre que

$$d_{TV}(X,Y) = \sum_n |p_n - q_n| = 2 \sup_{A \subset \mathbb{R}} |P(X \in A) - P(Y \in A)|.$$

(b) Si X e Y son continuas con funciones de densidad f y g, demuestre que

$$d_{TV}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx = 2 \sup_{A \subset \mathbb{R}} |P(X \in A) - P(Y \in A)|.$$

(c) Demuestre que convergencia en esta distancia implica convergencia en distribución, pero el recíproco es falsa.

(d) Demuestre que $P(X \neq Y) \geq \frac{1}{2} d_{TV}(X,Y)$ y que existe un par de variables X', Y' con las mismas distribuciones marginales para las cuales la igualdad en la expresión anterior vale.

(e) Si X_i, Y_i son v.a.i., demuestre que

$$d_{TV}\Big(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n d_{TV}(X_i, Y_i)$$