Probabilidad Avanzada I
Problemas I

1. Sea Ω un conjunto no vacío y sea $\mathcal{F}_0$ la colección de los conjuntos tales que A o A^c es finito. Definimos la función P para $E \in \mathcal{F}_0$ por
$$P(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es finito}, \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es finito}. \end{cases}$$
   a) Demuestre que $\mathcal{F}_0$ es un álgebra.
   b) Si Ω es numerablemente infinito, demuestre que P es finitamente aditiva pero no σ-aditiva.
   c) Si Ω no es numerable demuestre que P es σ-aditiva sobre $\mathcal{F}_0$.

2. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra y $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de eventos en $\mathcal{A}$. Definimos los conjuntos
$$\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k, \quad \limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k.$$
   Si $\liminf A_n = \limsup A_n = A$ decimos que la sucesión (A_n) converge a A: $A_n \to A$.
   a) Demuestre que $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$; $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$; y $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.
   b) Sean A_n, B_n subconjuntos de Ω, demuestre que $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$
   c) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$, ¿es cierto que $A_n \cup B_n \to A \cup B$, $\quad A_n \cap B_n \to A \cap B$?

3. Sean B y C subconjuntos de Ω. Halle $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ para la siguiente sucesión de conjuntos
$$A_n = \begin{cases} B, & \text{si } n \text{ es par}, \\ C, & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

4. Sean f_n, f funciones reales sobre Ω. Demuestre que
$$\{\omega : f_n(\omega) \nrightarrow f(\omega)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{\omega : |f_n(\omega - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

5. a) Suponga que $\mathcal{A}_n$ son álgebras que satisfacen $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Demuestre que su unión también es un álgebra.
   b) Sin embargo, la unión de una colección numerable de σ-álgebras no necesariamente es una σ-álgebra, aún cuando $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{j+1}$. ¿Es cierto que una unión numerable de σ-álgebras es un álgebra? (Ayuda: ponga $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_j$ la clase de todos los subconjuntos de $\{1, \ldots, j\}$ y $\mathcal{F}_j = \sigma(\mathcal{C}_j)$. Por otro lado, si $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$ son dos σ-álgebras, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es un álgebra.

6. Sea $(A_n)n \geq 1$ una sucesión de eventos disjuntos dos a dos y P una probabilidad. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

7. Sea $(A_\beta)_{\beta\in B}$ una familia de eventos disjuntos a pares. Demuestre que si $P(A_\beta) > 0$ para todo $\beta \in B$, entonces B debe ser numerable.

8. Suponga que μ es una medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ que es finita para conjuntos acotados y es invariante bajo traslaciones: $\mu(A + x) = \mu(A)$. Demuestre que $\mu(A) = \alpha m(A)$ para algún $\alpha \geq 0$ y m la medida de Lebesgue.

9. Sea X una v.a. con distribución uniforme en $[-1, 1]$. Halle la densidad de $Y = X^k$ para enteros positivos k.

10. Decimos que un punto x pertenece al soporte de la f.d. F si para todo $\varepsilon > 0$ tenemos $F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$. El conjunto de todos estos puntos se conoce como el *soporte* de F. Demuestre que todo punto de salto pertenece al soporte y que todo punto aislado del soporte es un punto de salto. De un ejemplo de una f.d. discreta cuyo soporte sea toda la recta.

11. Sea P una medida de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Para cualquier $B \in \mathcal{B}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ demuestre que existe una unión finita de intervalos A tal que $P(A \triangle B) < \varepsilon$. (Ayuda: Defina $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B} : \forall\varepsilon > 0$, existe una unión finita de intervalos A_ε t.q. $P(A_\varepsilon \triangle B) < \varepsilon\}$).

12. Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son semiálgebras de subconjuntos de Ω, demuestre que la clase $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{A_1 \cap A_2 : A_1 \in \mathcal{S}_1,\ A_2 \in \mathcal{S}_2\}$ también es una semiálgebra de subconjuntos de Ω. El álgebra (σ-álgebra) generada por $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ coincide con el álgebra (σ-álgebra) generada por $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

13. Considere un espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$. Decimos que un conjunto de Borel es regular si

$$P(A) = \text{ínf}\{P(G) : A \subset G, G \text{ es abierto}\} \quad y \quad P(A) = \sup\{P(C) : C \subset A, C \text{ es cerrado}\}$$

P es *regular* si todos los conjuntos de Borel son regulares. Sea $\mathcal{A}$ la colección de los conjuntos regulares.

a) Demuestre que $\mathbb{R} \in \mathcal{A},\ \varnothing \in \mathcal{A}$.

b) Demuestre que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos y uniones numerables.

c) Sea $\mathcal{C}$ la colección de los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Demuestre que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

d) Demuestre que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, es decir, demuestre la regularidad.

e) Demuestre que para cualquier conjunto de Borel B, $P(B) = \sup\{P(K) : K \subset B, K \text{ compacto}\}$.

14. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ((0,1], \mathcal{B}(0,1], m)$ donde m es la medida de Lebesgue. Definimos las variables aleatorias

$$X_1(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega; \qquad X_2(\omega) = \mathbf{1}_{\{1/2\}}(\omega); \qquad X_3(\omega) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}'}(\omega),$$

donde $\mathbb{Q}'$ son los números racionales en $(0,1]$. Observe que $P(X_1 = X_2 = X_3 = 0) = 1$. Describa las σ-álgebras $\sigma(X_i)$, $i = 1,2,3$.

15. Sea $\{A_n,\ n \geq 1\}$ una partición numerable de Ω y definimos $\mathcal{F} = \sigma(A_n,\ n \geq 1)$. Demuestre que una función $X : \Omega \to (-\infty, \infty]$ es $\mathcal{F}$-medible si y sólo si X es de la forma

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{B_i},$$

para constantes c_i. (¿Puedes describir la σ-álgebra $\mathcal{F}$?).

16. Demuestre: (a) Si X es una v.a. entonces $\sigma(X)$ está generada por una colección numerable de conjuntos.

(b) Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es cualquier σ-álgebra generada por una colección numerable de conjuntos, entonces $\mathcal{F} = \sigma(X)$ para alguna v.a. X.

17. Suponga que $T : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ una función medible y X una v.a. sobre Ω_1. Demuestre que $X \in \sigma(T)$ si y sólo si existe una v.a. Y en $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ tal que $X(\omega_1) = Y(T(\omega_1)), \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1$.

18. **El Teorema de Egorof.** Sean $X_n,\ X$ v.a. reales definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suponga que para todo $\omega \in \Lambda \in \mathcal{F}$ tenemos $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto Λ_ε tal que $P(\Lambda_\varepsilon) < \varepsilon$ y

$$\sup_{\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_\varepsilon} |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Por lo tanto la convergencia es uniforme fuera de conjuntos pequeños.

Ayuda: (a) Defina

$$B_n^{(k)} = \left[\sup_{i \geq n} |X_i(\omega) - X(\omega)|\right] \cap \Lambda.$$

(b) Demuestre que $B_n^{(k)} \downarrow \varnothing$ cuando $n \to \infty$.

(c) Existe $\{n_k\}$ tal que $P(B_{n_k}^{(k)}) < \varepsilon/2^k$.

(d) Ponemos $B = \cup_k B_{n_k}^{(k)}$ de modo que $P(B) < \varepsilon$.

19. Sea X una v.a. (a) Demuestre que X es independiente de si misma si y sólo si existe alguna constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $P(X = c =) = 1$.

(b) Si existe una función $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tal que X y $g(X)$ sean independientes, demuestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $P(g(X) = c) = 1$.

20. Si X, Y son variables independientes y f, g son funciones medibles reales ¿Por qué son independientes $f(X)$ y $g(Y)$? (No hace falta calcular nada).

21. Demuestre:

    (i) Cualquier variable aleatoria es independiente de una variable degenerada.

    (ii) Dos eventos disjuntos son independientes si y sólo si uno de ellos tiene probabilidad cero.

    (iii) Si $P(X = \pm 1,\ Y = \pm 1) = 1/4$ para cualquiera de los cuatro pares de signos, entonces X e Y son independientes.

22. Si X, Y, Z son v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\perp$ denota independencia, demuestre o de contrajemplos para las siguientes relaciones:

    (i) $X \perp Y \quad \Leftrightarrow \quad X^2 \perp Y^2$.

    (ii) $X \perp Y,\ X \perp Z \quad \Leftrightarrow \quad X \perp (Y + Z)$.

    (iii) $X \perp Y,\ Y \perp Z \quad \Rightarrow \quad X \perp Z$.

    (iv) $X \perp (Y, Z),\ Y \perp Z \quad \Rightarrow \quad X, Y, Z$ son independientes.

23. El color de las flores de una planta está determinado por dos genes que la planta recibe de manera independiente de las plantas que la generan. Si los genes son idénticos, las flores son unicolores, del color determinado por los genes. Si estos son diferentes, las flores son veteadas con los colores de ambos genes. Los genes para los colores blanco, rosado y rojo ocurren en la población en la proporción $p : q : r$, donde $p + q + r = 1$. Si los padres de una planta se seleccionan al azar, llamemos A al evento que ocurre si las flores son al menos parcialmente rosadas, y B al evento que ocurre si las flores son veteadas.

    (i) Halle $P(A)$ y $P(B)$.

    (ii) Demuestre que A y B son independientes si $p = 2/3$ y $r = q = 1/6$.

    (iii) ¿Son estos los únicos valores de p, q y r para los cuales A y B son independientes?

24. Si las v.a. $X_n, n \geq 1$ son independientes, demuestre que $P(\lim_{n \to 0} X_n = 0) = 1$ si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty,$$

25. (Barndorff-Nielsen) Si $\{A_n, n \geq 1\}$ son eventos que satisfacen
$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0; \qquad \sum_n P(A_n A_{n+1}^c) < \infty,$$
demuestre que $P(A_n,\ i.v.) = 0$.

26. Use el lema de Borel-Cantelli para demostrar que dada cualquier sucesión de v.a. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ que toman valores en toda la recta, existen constantes $c_n \to \infty$ tales que
$$P(\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{c_n} = 0) = 1.$$
Describa como se escogen las c_n.

27. Sea f, g funciones integrables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$. Definimos la convolución $f * g$ de f y g por
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) dy.$$
Demuestre que la convolución existe, que $f * g = g * f$ y que si alguna de las funciones es continua, la convolución es continua. Si X e Y son v.a.i. con densidades f y g respectivamente, demuestre que $X + Y$ tiene densidad $h = f * g$.

28. Sea $\{X_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con $P(X_1 = 1) = p = 1 - P(X_1 = 0)$. Sea A_n el evento de que ocurran n unos consecutivos entre el ensayo 2^n y el ensayo 2^{n+1}. Si $p \geq 1/2$ demuestre que los eventos A_n ocurren infinitas veces con probabilidad 1.

29. Sabemos que la probabilidad de que una sucesión de v.a.i. converja es igual a 0 ó 1. Si la sucesión (X_n) es i.i.d. y no es constante con probabilidad 1 demuestre que la sucesión converge con probabilidad 0.