Nombre: ________________________________________

| 1 | 2 | 3 | 4 | T |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

# Probabilidad Avanzada I

**Segundo Examen Parcial**

Viernes 20/04/12.

**Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.**

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

## Este examen tiene dos partes. Responda dos preguntas de cada una.

### Parte 1

1. Sea $(U_k, k \geq 1)$ una sucesión de v.a.i. donde $U_k$ tiene distribución uniforme en $[-a_k, a_k]$, donde $(a_k, k \geq 1)$ es una sucesión de números reales positivos.

   (a) Demuestre que si existe $M > 0$ tal que $|a_k| \leq M$ para todo $k$ pero $\sum_k a_k^2 = \infty$, entonces la condición de Lindeberg vale y por lo tanto el TCL también.

   (b) Si $\sum_k a_k^2 < \infty$ demuestre que la condición de Lindeberg no vale.

2. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables con igual distribución y 2-dependientes, es decir, las variables $X_m$ y $X_n$ son independientes si $|m-n| > 1$ pero no lo son en caso contrario. Suponga que $\mathrm{E}(X_n) = 0$ y $\mathrm{E}(X_n^2) = \sigma^2$. Demuestre que el TCL vale en este caso. Puede suponer cierto el TCL para variables i.i.d. ¿Cómo se puede extender este resultado al caso $m$-dependiente?

3. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de v.a.i.i.d. con distribución común $F$ continua. Sea $Y_k$ la variable aleatoria que vale 1 si $X_k$ es un record, es decir, si $X_k > \max\{X_j, 1 \leq j < k\}$ y vale 0 en otro caso.

   (a) Demuestre que las variables $(Y_k, k \geq 1)$ son independientes con $P(Y_k = 1) = 1/k$.

   (b) Sea $S_n = \sum_1^n Y_k$ el número de records en los primeros $n$ valores de la sucesión. Demuestre que
   $$\frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

### Parte 2

4. (a) ¿Qué quiere decir que una variable aleatoria es estable? Si la variable es estable y simétrica, ¿qué forma tiene su función característica?

   (b) Demuestre que una variable aleatoria $X$ es estable si y sólo si hay una sucesión $(X_n, n \geq 1)$ de v.a.i.i.d. con $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ tal que
   $$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} X \tag{1}$$
   donde $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$.

5. (a) Si $\varphi_1$ y $\varphi_2$ son funciones características infinitamente divisibles, demuestre que $\varphi_1\varphi_2$ también lo es. Si $\varphi$ es infinitamente divisible, su conjugada compleja $\bar{\varphi}$ y $|\varphi|^2$ también son infinitamente divisibles.

   (b) Demuestre que una función característica infinitamente divisible no se anula nunca.

6. (a) ¿Es cierto que la combinación convexa de funciones características infinitamente divisibles también es infinitamente divisible?

   (b) Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. e independientes de $N \sim Pois(\lambda)$ para $\lambda > 0$. Demuestre que $\sum_{k=1}^{N} X_k$ es infinitamente divisible.