Nombre: ____

1	2	3	4	T

Probabilidad Avanzada I

Primer Examen Parcial

Viernes 16/03/12.

Lea todo el examen detenidamente antes de comenzar a responderlo. Justifique sus respuestas con el mayor rigor matemático posible y cite los resultados del curso que utilice.

La evaluación de este examen se basará no tanto en la cantidad de problemas resueltos, como en la claridad de los argumentos, la aplicación correcta de definiciones, propiedades y métodos y en la redacción de soluciones.

1. (2 puntos) a) Defina claramente convergencia casi segura y en L^p de una sucesión de variables aleatorias. Dé ejemplos que demuestren que ninguno de estos modos de convergencia implica el otro.

   b) Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión creciente de variables aleatorias y suponga que $X_n \xrightarrow{P} X$. Demuestre que $X_n \to X$ c.s.

2. (2 puntos) a) ¿Qué quiere decir que la sucesión de v.a. $X_n, n \geq 1$ es uniformemente integrable?

   b) Sea $X_n, n \geq 1$ una sucesión de v.a. y g una función no-negativa y no-decreciente tal que $g(x)/x \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Si

   $$\sup_n \mathrm{E}(g(X_n)) < \infty$$

   demuestre que $X_n,\ n \geq 1$ es uniformemente integrable.

3. (2 puntos) a) Enuncie y demuestre el Teorema de Skorohod. Puede suponer cierto el siguiente resultado: Si $F_n \xrightarrow{d} F$ y $t \in (0,1) \cap \mathcal{C}(F^{\leftarrow})$ entonces $F_n^{\leftarrow}(t) \to F^{\leftarrow}(t)$.

   b) Demuestre que si $X_n \sim \mathcal{U}(-n, n),\ n \geq 1$ entonces $\{X_n,\ n \geq 1\}$ no es tensa.

4. (4 puntos) a) Sea $\varphi(t)$ la función característica de una v.a. ¿Cuáles de las siguientes funciones también son funciones características? $\bar{\varphi}$, φ^2, $|\varphi|^2$, $\mathrm{Re}(\varphi)$, $|\varphi|$. En cada caso presente argumentos para su respuesta o un contraejemplo.

   b) Sea X una v.a. Si para algún $n \geq 1$ la f.c. tiene derivada finita de orden $2n$ en $t = 0$, entonces $\mathrm{E}\,|X|^{2n} < \infty$ y $\mathrm{E}(X^{2n}) = i^{-2n}\varphi^{(2n)}(0)$.

   c) Suponga que

   (i) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ existe para todo t.

   (ii) $\varphi(t)$ es continua en 0.

   Demuestre que para alguna f.d. F se tiene que $F_n \xrightarrow{d} F$ y φ es la f.c. de F.