Capítulo 2

Funciones Características

2.1. Introducción

Una variable aleatoria compleja X es una función medible $X : \omega \to \mathbb{C}$ de la forma $X(\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$ donde U, V son funciones medibles de Ω a valores reales. U y V son, respectivamente, la parte real e imaginaria de X. Si U, V son integrables entonces X es integrable y tenemos que

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(U) + i\,\mathrm{E}(V).$$

Teniendo en cuenta las desigualdades

$$\text{máx}(|U|, |V|) \leq |X| \leq |U| + |V|$$

observamos que al igual que en el caso real, X es integrable si y sólo si $|X|$ es integrable. También es posible demostrar la siguiente desigualdad, que queda como ejercicio:

$$|\,\mathrm{E}(X)| \leq \mathrm{E}(|X|).$$

2.2. Funciones Características

Definición 2.1 La función característica (f.c.) de una variables aleatoria X con f.d. F es la función a valores complejos definida por

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF(x).$$

Propiedades.
(a) Para cualquier v.a. X la función característica siempre existe:

$$|\,\mathrm{E}\, e^{itX}| \leq \mathrm{E}\,|e^{itX}| = 1.$$

(b) Toda función característica satisface $|\varphi(t)| \leq 1$ y $\varphi(0) = 1$.
(c) Toda f.c. es uniformemente continua:

$$\begin{aligned} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= |\,\mathrm{E}\, e^{i(t+h)X} - \mathrm{E}\, e^{itX}| \\ &= |\,\mathrm{E}\, e^{itX}(e^{ihX} - 1)| \\ &\leq \mathrm{E}\,|e^{ihX} - 1| \to 0 \end{aligned}$$

cuando $h \downarrow 0$ por el TCD. Como la cota es independiente de t, la convergencia es uniforme.

(d) Si X es una v.a. con f.c. φ_X, $Y = aX + b$ tiene f.c.

$$\varphi_Y(t) = \mathrm{E}(e^{itY}) = \mathrm{E}(e^{it(aX+b)}) = \varphi_X(at)e^{ibt}$$

(e) Si $\bar{z}$ denota el conjugado complejo del número z, $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$:

$$\overline{\varphi_X(t)} = \mathrm{E}(\overline{e^{itX}}) = \mathrm{E}(e^{-itX}) = \mathrm{E}(e^{i(-t)X}) = \mathrm{E}(e^{it(-X)})$$

(f) Tenemos

$$Re(\varphi(t)) = \int \cos(tx)\, dF(x); \qquad Im(\varphi(t)) = \int \mathrm{sen}(tx)\, dF(x)$$

donde la primera función es par mientras que la segunda es impar.
(g) La f.c. φ_X es real si y sólo si $X \stackrel{d}{=} -X$ si y sólo si la medida asociada a F_X es simétrica. Esto es cierto porque φ_X es real si y sólo si $\varphi_X = \bar{\varphi}_X$ si y sólo si X y $-X$ tienen la misma función característica. Por el teorema de unicidad que veremos más adelante, esto implica que $X \stackrel{d}{=} -X$.
(h) Si X e Y son independientes se tiene $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathrm{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathrm{E}(e^{itX}e^{itY}) = \mathrm{E}(e^{itX})\,\mathrm{E}(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

(i) Podemos generalizar la propiedad anterior de la siguiente manera: Si $X_1, \dots, X_n$ son i.i.d. con f.c. común φ, entonces

$$\mathrm{E}(e^{it(a_n^{-1}S_n - nb_n)}) = e^{-itnb_n}(\varphi(t/a_n))^n.$$

Distribución	Notación	Función Característica
Delta de Dirac	δ_a	e^{ita}
Bernoulli	Be(p)	$q + pe^{it}$
Binomial	Bin(n,p)	$(q + pe^{it})^n$
Geométrica	Ge(p)	$p/(1 - qe^{it})$
Poisson	Po(λ)	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$

Tabla 1. Funciones características de alguna distribuciones discretas.

Distribución	Notación	Función Característica
Uniforme	$U(a,b)$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
	$U(0,1)$	$\frac{e^{it}-1}{it}$
	$U(-1,1)$	$\frac{\sin t}{t}$
Exponencial	Exp(λ)	$1/(1 - \lambda it)$
Gamma	$\Gamma(p,\theta)$	$\left(\frac{1}{1-\theta it}\right)^p$
Normal	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$e^{it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$
	$\mathcal{N}(0,1)$	$e^{-\frac{1}{2}t^2}$
Cauchy	$C(0,1)$	$e^{-\lvert t\rvert}$
Estables Simétricas		$e^{-c\lvert t\rvert^\alpha}$

Tabla 2. Funciones características de alguna distribuciones continuas.

2.3. Desarrollos

2.3.1. Desarrollos de e^{ix}

Comenzamos con una integración por partes. Para $n \geq 0$ tenemos

$$\int_0^x e^{is}(x-s)^n ds = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{i}{n+1}\int_0^x (x-s)^{n+1}e^{is}ds. \tag{2.1}$$

Para $n = 0$ esta relación es

$$\int_0^x e^{is}ds = \frac{e^{ix}-1}{i} = x + i\int_0^x (x-s)e^{is}ds,$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + i^2\int_0^x (x-s)e^{is}\,ds \\ &= 1 + ix + i^2\Big[\frac{x^2}{2} + \frac{i}{2}\int_0^x (x-s)^2 e^{is}ds\Big] \\ &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{i^3}{2}\Big[\frac{x^3}{3} + \frac{i}{3}\int_0^x (x-s)^3 e^{is}ds\Big] \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

En general obtenemos para $n \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^{n+1}}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^{is}\,ds. \tag{2.2}$$

Por lo tanto

$$\Big|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\Big| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{2.3}$$

Concluimos que truncar el desarrollo de e^{ix} luego de un número finito de términos da una aproximación cuyo error está acotado por el módulo del primer término no tomado en cuenta.

Escribiendo ahora (2.1) con $n-1$ en lugar de n obtenemos

$$\int_0^x (x-s)^{n-1}e^{is}ds - \frac{x^n}{n} = \frac{i}{n}\int_0^x (x-s)^n e^{is}ds.$$

Si multiplicamos por $i^n/(n-1)!$ e intercambiamos ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\frac{i^{n+1}}{n!}\int_0^x (x-s)^n e^{is}ds = \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^x (x-s)^{n-1}e^{is}ds - \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Sustituyendo esta expresión en el lado derecho de (2.2) obtenemos

$$e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!} = \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^x (x-s)^{n-1}e^{is}ds - \frac{(ix)^n}{n!},$$

y por lo tanto

$$\Big|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\Big| \leq \frac{|x|^n}{n!} + \frac{|x|^n}{n!} = \frac{2|x|^n}{n!}. \tag{2.4}$$

Combinando (2.3) y (2.4) obtenemos

$$\Big| e^{ix} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^k}{k!} \Big| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \wedge \frac{2|x|^n}{n!}. \tag{2.5}$$

Observamos que el primer término del lado derecho da una mejor estimación para x pequeño mientras que el segundo es mejor para x grande.

2.3.2. Desarrollos de la Función Característica

Supongamos que X es una v.a. cuyos n primeros momentos absolutos son finitos: $\mathrm{E}\,|X|^k < \infty$ para $1 \leq k \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}\Big| \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathrm{E}(X^k) \Big| &= \Big| \mathrm{E}(e^{itX}) - \mathrm{E}\,\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} X^k \Big) \Big| \\ &\leq \mathrm{E}\,\Big| e^{itX} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(itX)^k}{k!} \Big|\end{aligned}$$

y usando (2.5) con tX en lugar de x obtenemos

$$\Big| \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k \,\mathrm{E}(X^k)}{k!} \Big| \leq \mathrm{E}\,\Big(\frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!} \wedge \frac{2|tX|^n}{n!} \Big). \tag{2.6}$$

Supongamos ahora que existen momentos de todos los órdenes y que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n \,\mathrm{E}(|X|^n)}{n!} = 0. \tag{2.7}$$

Si ahora hacemos $n \to \infty$ en (2.6) obtenemos

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathrm{E}(X^k).$$

Una condición suficiente para (2.7) es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} \mathrm{E}(|X|^k) = \mathrm{E}(e^{|t||X|}) < \infty$$

la cual vale si $\Psi(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, si la función generadora de momentos existe en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1
Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du \\ &= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}(u^2 - 2tu + t^2) \Big\} du \\ &= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(u-t)^2} du \\ &= e^{t^2/2}\end{aligned}$$

y concluimos que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(e^{tX}) < \infty$. Por lo tanto podemos desarrollar tanto la fgm como $e^{t^2/2}$ para obtener

$$\mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{E}(X^k) = e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)^k,$$

es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{E}(X^k)}{k!} t^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{-l}}{l!} t^{2l}.$$

Igualando coeficientes obtenemos que

$$\frac{\mathrm{E}(X^{2n})}{(2n)!} = \frac{2^{-n}}{n!}$$

y concluimos que

$$\mathrm{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{n!} 2^{-n}, \qquad \mathrm{E}(X^{2n+1}) = 0.$$

Ahora bien, como

$$\varphi(t) = \mathrm{E}\, e^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\,\mathrm{E}(X^k),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!}\,\mathrm{E}(X^{2k}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{k!} 2^{-k} \\ &= \sum \frac{(i^2 t^2 2^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{-t^2}{2}\Big)^k \\ &= e^{-t^2/2} \end{aligned}$$

de modo que, salvo por constantes multiplicativas, la densidad normal típica y su f.c. son iguales.

2.4. Momentos y Derivadas

Si el k-ésimo momento absoluto de X existe, podemos calcularlo usando la $k$ésima derivada de la f.c.

Teorema 2.1 *Sea X una v.a. con f.d. F y f.c. φ. Si $\mathrm{E}\,|X|^n < \infty$ para algún $n \geq 1$, entonces $\varphi^{(k)}$ existe para $k = 1, 2, \dots, n$, es uniformemente continua y*

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x), \tag{2.8}$$

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k\,\mathrm{E}(X^k) \tag{2.9}$$

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\,\mathrm{E}(X^k) + o(|t|^n) \quad (t \to 0). \tag{2.10}$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - \mathrm{E}(iXe^{itX}) &= \mathrm{E}\,\Big(\frac{e^{i(t+h)X} - e^{itX} - ihXe^{itX}}{h}\Big) \\ &= \mathrm{E}\,\Big(e^{itX}\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h}\Big). \end{aligned}$$

Usando (2.4) con $n = 1$ obtenemos

$$\big|e^{itX}\big|\big|\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h}\big| \leq 2|X| \in L^1.$$

Por otro lado usando (2.3) obtenemos

$$\big|\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h}\big| \leq \frac{h^2X^2}{2h} = h\frac{X^2}{2} \to 0$$

cuando $h \downarrow 0$ y por el TCD vemos que

$$\lim_{h\downarrow 0}\big(\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - \mathrm{E}(iXe^{itX})\big) = \mathrm{E}\,\big(\lim_{h\downarrow 0} e^{itX}\big(\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h}\big)\big) = 0.$$

En consecuencia

$$\varphi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx}\,dF(x).$$

El caso general de la fórmula sigue por inducción: Usando el mismo procedimiento

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{(k)}(t+h) - \varphi^{(k)}(t)}{h} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)^k\frac{e^{ihx} - 1}{h}\,dF(x)\\ &\to \int_{-\infty}^{\infty}(ix)^{k+1}e^{itx}dF(x) \qquad (h \to 0),\end{aligned}$$

por el TCD, ya que el integrando converge a $(ix)^{k+1}e^{itx}$ cuando $h \to 0$, está acotado por $|x|^{k+1}$ para $|h| < 1$ y $\mathrm{E}\,|X|^{k+1} < \infty$. Además, el lado izquierdo converge a la derivada de orden $k+1$ cuando $h \to 0$, lo que demuestra la fórmula (2.8). (2.9) se obtiene poniendo $t = 0$.

Veamos la continuidad uniforme. Para $k = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}|\varphi'(t+h) - \varphi'(t)| &= \Big|\int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx}(e^{ihx} - 1)dF(x)\Big| \leq \int_{-\infty}^{\infty}|x||e^{ihx} - 1|dF(x)\\ &\leq \int_{|x|\leq A} hx^2\,dF(x) + 2\int_{|x|>A}|x|\,dF(x)\\ &\leq hA^2 + 2\int_{|x|>A}|x|\,dF(x)\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ escogemos A de modo que la integral sea menor que $\varepsilon/2$ y luego escogemos h de modo que $hA^2 < \varepsilon/2$. Para el caso general usamos

$$|\varphi^{(k+1)}(t+h) - \varphi^{(k+1)}(t)| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty}(ix)^{k+1}e^{itx}(e^{ihx} - 1)dF(x)\Big| \leq hA^{k+2} + 2\int_{|x|>A}|x|^{k+1}\,dF(x),$$

y completamos la demostración como antes.

Para ver la última fórmula del teorema recordamos (2.6):

$$\Big|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k\,\mathrm{E}(X^k)}{k!}\Big| \leq |t|^n\,\mathrm{E}\,\Big(\frac{|t||X|^{n+1}}{(n+1)|} \wedge \frac{2|X|^n}{n!}\Big). \tag{2.11}$$

Pero

$$\text{mín}\{\frac{|t||X|^{n+1}}{(n+1)|},\ \frac{2|X|^n}{n!}\} \to 0 \qquad (t \to 0)$$

y está acotado por $2|X|^n/n!$ que es integrable por hipótesis, así que por el TCD

$$\mathrm{E}\,\big[\,\text{mín}\{\frac{|t||X|^{n+1}}{(n+1)|},\ \frac{2|X|^n}{n!}\}\big] \to 0 \qquad (t \to 0)$$

y en consecuencia la cota superior en (2.11) es $o(|t|^n)$ cuando $t \to 0$. ■

2.5. Unicidad y Continuidad

Teorema 2.2 (Unicidad) *La función característica de una distribución de probabilidad determina de manera única la distribución de probabilidad.*

Demostración. Sea X una v.a. con f.d. F y f.c. φ. Veamos que φ determina F. Para cualquier f.d. G con f.c. γ y cualquier real θ tenemos la siguiente versión de la relación de Parseval, que se obtiene aplicando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta y}\varphi(y)\,dG(y) &= \int_{y\in\mathbb{R}} e^{-i\theta y}\Big[\int_{x\in\mathbb{R}} e^{iyx}\,dF(x)\Big]dG(y)\\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{iy(x-\theta)}\,dF(x)\,dG(y)\\ &= \int_{x\in\mathbb{R}}\Big[\int_{y\in\mathbb{R}} e^{iy(x-\theta)}\,dG(y)\Big]\,dF(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma(x-\theta)dF(x). \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Sea ahora $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ con densidad $\phi(x)$, de modo que σN tiene densidad normal con varianza σ^2. Reemplazamos $dG(y)$ por $\frac{1}{\sigma}\phi(y/\sigma)dy$. Luego de hacer un cambio de variables en el lado izquierdo y usando la forma de la f.c. Gaussiana γ en el lado derecho obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta\sigma y}\varphi(\sigma y)\phi(y)\,dy = \int_{z\in\mathbb{R}} e^{-\sigma^2(z-\theta)^2/2}dF(z). \qquad (2.13)$$

Ahora integramos ambos lados de (2.13) sobre θ de $-\infty$ a x y obtenemos

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta\sigma y}\varphi(\sigma y)\phi(y)dy\,d\theta = \int_{-\infty}^{x}\int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma^2(z-\theta)^2/2}dF(z)\,d\theta,$$

y usando el teorema de Fubini para invertir el orden de integración en el lado derecho obtenemos que la expresión anterior es

$$= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\sigma^2(z-\theta)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}d\theta\Big]dF(z).$$

En la integral interior hacemos el cambio de variables $s=\theta - z$ para obtener

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta\sigma y}\varphi(\sigma y)\phi(y)dy\,d\theta &= \frac{1}{\sigma}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{2\pi}\Big[\int_{-\infty}^{x-z}\frac{e^{-\sigma^2 s^2/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma^{-1}}ds\Big]dF(z)\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{-\infty}^{x-z}\phi(s;0,\sigma^{-2})\,ds\Big]\,dF(z)\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}P(\sigma^{-1}N + X \le x).\end{aligned}$$

Dividimos por $\sqrt{2\pi}\sigma^{-1}$ y hacemos $\sigma\to\infty$. Dada la f.c. φ obtenemos por el Teorema de Slutsky

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta\sigma y}\varphi(\sigma y)\phi(y)dy\,d\theta = \lim_{\sigma\to\infty} P(\sigma^{-1}N+X\le x) = F(x) \qquad (2.14)$$

para todo $x\in\mathcal{C}(F)$, de modo que φ determina el valor de F en sus puntos de continuidad y eso es suficiente. ■

Poniendo $\theta = 0$ en (2.12) obtenemos la siguiente identidad:

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(y)\,dG(y) = \int_{\mathbb{R}}\gamma(x)\,dF(x).$$

El siguiente corolario nos da una fórmula de inversión

Corolario 2.1 *Sea F una f.d. con f.c. φ integrable:*

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, dt < \infty.$$

Entonces F tiene una densidad f continua y acotada dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} \varphi(y)\, dy.$$

Demostración. A partir de (2.14) definimos

$$F_\sigma(x) := P(\sigma^{-1}N + X \leq x)$$

y observamos que esta f.d. tiene densidad, que llamamos f_σ, ya que $\sigma^{-1}N$ tiene densidad. A partir del lado izquierdo de (2.14) obtenemos

$$f_\sigma(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta y} \varphi(y) \phi(y/\sigma)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta y} \varphi(y) e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy.$$

Observamos que

$$\left| e^{-i\theta y} \varphi(y) e^{-y^2/2\sigma^2} \right| \leq |\varphi(y)| \in L^1$$

y cuando $\sigma \to \infty$

$$e^{-i\theta y} \varphi(y) e^{-y^2/2\sigma^2} \to e^{-i\theta y} \varphi(y).$$

Por el TCD, $f_\sigma(\theta) \to f(\theta)$. Además, para todo intervalo finito I

$$\sup_{\theta \in I} f_\sigma(\theta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)| e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)|\, dy < \infty.$$

Así, cuando $\sigma \to \infty$, tenemos por el teorema de Slutsky y convergencia acotada

$$F(I) = \lim_{\sigma \to \infty} P(\sigma^{-1}N + X \in I) = \lim_{\sigma \to \infty} \int_I f_\sigma(\theta)\, d\theta = \int_I f(\theta)\, d\theta.$$

Por lo tanto f es la densidad de F. ■

Antes de demostrar el teorema de continuidad presentamos un lema preliminar.

Lema 2.1 *Si F es una f.d. con f.c. φ, entonces existe $\alpha \in (0, \infty)$ tal que para todo $x > 0$*

$$F([-x, x]^c) \leq \alpha x \int_0^{1/x} (1 - \operatorname{Re} \varphi(t))\, dt.$$

Demostración. Como

$$\operatorname{Re} \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ty\, dF(y),$$

tenemos, usando Fubini

$$\begin{aligned}
x\int_0^{1/x}(1-\operatorname{Re}\varphi(t))\,dt &= x\int_0^{1/x}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos ty)\,dF(y)\,dt \\
&= x\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_0^{1/x}(1-\cos ty)\,dt\Big]dF(y) \\
&= x\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{1}{x}-\frac{\operatorname{sen}(y/x)}{y}\Big)\,dF(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(1-\frac{\operatorname{sen}(y/x)}{y/x}\Big)\,dF(y).
\end{aligned}$$

Como el integrando es positivo, esto es mayor que

$$\int_{|y|>x}\Big(1-\frac{\operatorname{sen}(y/x)}{y/x}\Big)\,dF(y) \geq \alpha^{-1}F([-x,x]^c),$$

donde

$$\alpha^{-1} = \inf_{|y/x|\geq 1}\Big(1-\frac{\operatorname{sen}(y/x)}{y/x}\Big).$$

■

Teorema 2.3 (Continuidad, Lévy) *(i) Sea* $\{X_n,\ n\geq 1\}$ *una sucesión de v.a. tal que* X_n *tiene f.d.* F_n *y f.c.* φ_n. *Si* $X_n \xrightarrow{d} X_0$ *entonces*

$$\varphi_n(t)\to\varphi_0(t), \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

(ii) Si

a) $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)$ *existe para todo* t. *Llamemos* $\varphi_0(t)$ *al límite.*

b) $\varphi_0(t)$ *es continua en* 0.

Entonces para alguna f.d. F_0

$$F_n \xrightarrow{d} F_0$$

y φ_0 *es la f.c. de* F_0. *Si* $\varphi_0(0)=1$ *entonces* F_0 *es propia.*

Demostración. (i) Si $X_n \xrightarrow{d} X_0$, como consecuencia del teorema de Skorohod tenemos que $e^{itX_n}\xrightarrow{d} e^{itX_0}$ y como $|e^{itX_n}|\leq 1$, tenemos por convergencia dominada que

$$\varphi_n(t) = \mathrm{E}\,e^{itX_n}\to Ee^{itX_0}=\varphi_0(t).$$

(ii) Supongamos ahora que para todo $t\in\mathbb{R}$, se tiene que $\varphi_n(t)\to\varphi_0(t)$, con φ_0 continua en 0, entonces demostramos primero que $\{F_n\}$ es tensa. Sea $M>0$ y usemos el lema 2.1 tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} F_n([-M,M]^c) \leq \limsup_{n\to\infty}\alpha M\int_0^{1/M}(1-\operatorname{Re}\varphi_n(t))\,dt.$$

Pero $\varphi_n(t)\to\varphi_0(t)$ implica que $\operatorname{Re}\varphi_n(t)\to\operatorname{Re}\varphi_0(t)$ y $1-\operatorname{Re}\varphi_n(t)\to 1-\operatorname{Re}\varphi_0(t)$. Y como $1-\varphi_n$ está acotada, también lo está $\operatorname{Re}(1-\varphi_n)=1-\operatorname{Re}\varphi_n$. Por el TCD

$$\limsup_{n\to\infty} F_n([-M,M]^c) \leq \alpha M\int_0^{1/M}(1-\operatorname{Re}\varphi_0(t))\,dt.$$

Como φ_0 es continua en 0,

$$\lim_{t\to 0} \varphi_0(t) = \varphi_0(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 1.$$

En consecuencia, $1 - \operatorname{Re}\varphi_0(t) \to 0$ cuando $t \to 0$ y por lo tanto, dados $\varepsilon > 0$ y M suficientemente grande tenemos

$$\alpha M \int_0^{1/M} (1 - \operatorname{Re}\varphi_0(t))\, dt \leq \alpha M \int_0^{1/M} \varepsilon\, dt = \alpha\varepsilon.$$

Por lo tanto $\{F_n\}$ es tensa y en consecuencia cualquier par de subsucesiones convergentes de $\{F_n\}$ tienen que converger al mismo límite, porque si

$$F_{n'} \xrightarrow{d} F, \quad \text{y} \quad F_{n''} \xrightarrow{d} G,$$

entonces F y G son propias. Por la parte (i) del teorema que ya hemos probado

$$\varphi_{n'} \to \varphi_F = \varphi_0, \qquad \text{y} \qquad \varphi_{n''} \to \varphi_F = \varphi_0,$$

y por lo tanto $\varphi_F = \varphi_G$. Por el teorema de unicidad $F = G$. Por lo tanto cualquier par de subsucesiones convergentes convergen al mismo límite y por lo tanto $\{F_n\}$ converge a un límite cuya f.c. es φ_0. ■

Ejemplo 2.2 (Aproximación Poisson a la Binomial)
Sea S_n una v.a. con distribución binomial de parámetros n y p:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Si $p = p(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ de modo que $np \to \lambda > 0$ entonces

$$S_n \xrightarrow{d} Po(\lambda).$$

Para verificar este resultado calculamos inicialmente la f.c. de $Y \sim Po(\lambda)$. Tenemos

$$\operatorname{E} e^{itY} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Recordemos que podemos representar una variable binomial como suma de variables iid Bernoulli $\xi_1, \dots, \xi_n$ con $P(\xi_i = 1) = p = 1 - P(\xi_i = 0)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{E} e^{itS_n} &= (\operatorname{E} e^{it\xi_1})^n = (1 - p + e^{it}p)^n \\ &= (1 + p(e^{it} - 1))^n = \big(1 + \frac{np(e^{it}-1)}{n}\big)^n \\ &\to e^{\lambda(e^{it}-1)}. \end{aligned}$$