Capítulo 2

Valores Extremos

2.1. Distribuciones de Valores Extremos

Una aplicación importante del teorema de convergencia a familias aparece en el estudio de las posibles distribuciones límite para máximos normalizados de v.a.i.i.d. Supongamos que $\{X_n, n \geq 1\}$ es una sucesión i.i.d. con f.d. común F y sea $M_n = \text{máx}\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Teorema 2.1 *Supongamos que existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ para $n \geq 1$ tales que*

$$P\big(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\big) = F^n(a_n x + b_n) \to G(x) \tag{2.1}$$

débilmente cuando $n \to \infty$ donde G es propia ($G(\mathbb{R}) = 1$) y no está concentrada en un punto. Entonces G pertenece a algunas de las siguientes tres familias de distribuciones:

$$(a)\ \textit{Tipo I:}\quad \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

$$(b)\ \textit{Tipo II:}\quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x \geq 0 \end{cases} \quad \textit{para algún } \alpha > 0. \tag{2.3}$$

$$(c)\ \textit{Tipo III:}\quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}) & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \textit{para algún } \alpha > 0. \tag{2.4}$$

Observación 2.1 Este teorema fue originalmente propuesto por Fisher y Tippett en 1928 y demostrado rigurosamente por Gnedenko en 1943. La distribución (a) es la distribución de Gumbel, (b) es la distribución de Fréchet y (c) es la distribución de Weibull.

Demostración del Teorema 2.1.

A partir de (2.1) obtenemos para cualquier $t > 0$,

$$F^{[nt]}(a_{[nt]}x + b_{[nt]}) \to G(x)$$

y además

$$F^{[nt]}(a_n x + b_n) = (F^n(a_n x + b_n))^{[nt]/n} \to G^t(x).$$

Por lo tanto G y G^t son del mismo tipo y usando el teorema de convergencia a familias sabemos que existen constantes $A(t) > 0$, $B(t) \in \mathbb{R}$, para $t > 0$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{[nt]}} = A(t), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{[nt]}}{a_{[nt]}} = B(t) \tag{2.5}$$

y

$$G^t(x) = G(A(t)x + B(t)) \tag{2.6}$$

A partir de (2.5) vemos que las funciones $A(t)$ y $B(t)$ son medibles. Por ejemplo, en el caso de A observamos que límites de funciones medibles son medibles, así que basta ver para n fijo que la función $t \mapsto a_n/a_{[nt]}$ es medible. Pero como el rango de $a_{[n\cdot]}$ es el conjunto discreto $\{a_j\}$ tenemos, suponiendo que los a_j son todos distintos,

$$\{t : a_{[nt]} = a_j\} = \Big[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\Big)$$

y esto demuestra la medibilidad. Si hay valores repetidos este conjunto es

$$\bigcup_{k:a_k=a_j} \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big).$$

Regresemos a (2.6) y para $t > 0,\ s > 0$ tenemos, por un lado

$$G^{ts}(x) = G(A(ts)x + B(ts))$$

y por otro

$$\begin{aligned} G^{ts}(x) &= (G^s(x))^t = (G(A(s)x + B(s)))^t \\ &= G(A(t)[A(s)x + B(s)] + B(t)) \\ &= G(A(t)A(s)x + A(t)B(s) + B(t)). \end{aligned}$$

Como hemos supuesto que G no está concentrada en un punto concluimos que para $t > 0,\ s > 0$,

$$A(ts) = A(t)A(s), \tag{2.7}$$

$$B(ts) = A(t)B(s) + B(t) = A(s)B(t) + B(s), \tag{2.8}$$

la última igualdad sigue por simetría. La ecuación (2.7) es la ecuación funcional de Hamel y por el teorema 1.4 la única solución finita, medible y no-negativa es

$$A(t) = t^\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Consideramos a continuación tres casos: (a) $\theta = 0$, (b) $\theta > 0$ y (c) $\theta < 0$.

Caso (a) $\theta = 0$. En este caso $A(t) \equiv 1$ y (2.8) es

$$B(ts) = B(t) + B(s)$$

que es una variante de la relación de Hamel. La solución tiene la forma

$$B(t) = c\log t, \quad t > 0,\ c \in \mathbb{R}$$

y (2.6) es

$$G^t(x) = G(x + c\log t). \tag{2.10}$$

Si c fuese 0 entonces G sería degenerada. Si c fuese positivo entonces, para x fijo, $G^t(x)$ sería creciente en t, y concluimos que $c < 0$.

Si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, $G(x_0) = 1$ entonces de (2.10) obtenemos que

$$1 = G(x_0 + c\log t)$$

para todo t, y haciendo un cambio de variables obtenemos que $G(u) = 1$ para todo u, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $G(x) < 1$ para todo x. De manera similar se muestra que $G(x) > 0$ para todo x. Poniendo $x = 0$ en (2.10) obtenemos para $t > 0$

$$G^t(0) = G(c\log t). \tag{2.11}$$

Ahora ponemos $G(0) = e^{-p}$ y $u = c\log t$. Como el rango de t es $(0,\infty)$, en rango de u es $(-\infty,\infty)$ y haciendo un cambio de variables en (2.11) obtenemos

$$\begin{aligned} G(u) &= e^{-tp} = \exp\{-pe^{c^{-1}u}\} = \exp\{-e^{c^{-1}u+\log p}\} \\ &= \exp\{-e^{-(|c|^{-1}u-\log p)}\} \\ &= \Lambda(\frac{u}{|c|} - \log p). \end{aligned}$$

Caso (b) $\theta < 0$. A partir de (2.8)

$$A(t)B(s) + B(t) = A(s)B(t) + B(s)$$

de modo que si $t \neq 1,\ s \neq 1$,

$$\frac{B(s)}{1 - A(s)} = \frac{B(t)}{1 - A(t)},$$

es decir, la función $B(t)/(1 - A(t))$ es constante, igual a c, digamos. Por lo tanto, para $t \neq 1$

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{B(s)}{1 - A(s)}(1 - A(t)) \\ &= c(1 - t^\theta) \end{aligned}$$

y (2.6) es ahora

$$G^t(x) = G(t^\theta x + c(1 - t^\theta)) = G(t^\theta(x - c) + c)$$

y cambiando variables

$$G^t(x + c) = G(t^\theta x + c).$$

Ponemos $H(x) = G(x + c)$, entonces G y H son del mismo tipo así que sólo nos ocupamos de H, que satisface

$$H^t(x) = H(t^\theta x) \tag{2.12}$$

y no es degenerada. Poniendo $x = 0$ obtenemos de (2.12), $t\log H(0) = \log H(0)$ para $t > 0$ de modo que $\log H(0)$ vale 0 ó vale $-\infty$, es decir, $H(0) = 0$ ó 1. Pero $H(0) = 1$ es imposible porque esto implica la existencia de $x < 0$ con $H(x) < 1$ y por lo tanto el lado izquierdo de (2.12) es decreciente en t mientras que el lado derecho es creciente en t. Concluimos que $H(0) = 0$.

Poniendo $x = 1$ en (2.12) obtenemos $H^t(1) = H(t^\theta)$. Si $H(1) = 0$ entonces $H \equiv 0$ mientras que si $H(1) = 1$ entonces $H \equiv 1$, y ambas conclusiones contradicen la hipótesis de que H es no degenerada. Por lo tanto $H(1) \in (0, 1)$.

Ponemos $\alpha = -1/\theta$, $H(1) = \exp\{-p^{-\alpha}\}$, $u = t^{-1/\alpha}$ de modo que $u^{-\alpha} = t$. A partir de (2.12) con $x = 1$ obtenemos para $u > 0$

$$\begin{aligned} H(u) &= \exp\{-p^{-\alpha}t\} = \exp\{-(pu)^{-\alpha}\} \\ &= \Phi_\alpha(pu). \end{aligned}$$

Caso (c) $\theta > 0$. La demostración es similar. ■

Observación 2.2 Las tres distribuciones mencionadas en el teorema se llaman, en conjunto, las distribuciones de valores extremos (DVE). Observamos que el teorema 2.1 no garantiza la existencia de un límite no degenerado para M_n, ni nos dice cuál es el límite cuando existe. Lo que sabemos es que, cuando el límite existe, tiene que ser una de las distribuciones incluidas en el teorema, cualquiera sea la distribución inicial F.

Ejemplo 2.1
Sea F la distribución exponencial de parámetro 1: $F(x) = 1-e^{-x}$ para $x > 0$, entonces $F^n(x) = (1-e^{-x})^n$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} F^n(x + \log n) &= (1 - e^{-x-\log n})^n \\ &= \big(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\big)^n \\ &\to \exp\{e^{-x}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, con una normalización $a_n = 1$ y $b_n = \log n$, M_n tiene como límite una distribución Gumbel.

Observamos que para la distribución exponencial, la función de cuantilas es $Q(x) = -\log(1 - x)$ para $0 < x < 1$, y las constantes de normalización b_n son en este caso

$$b_n = \log n = Q(1 - \frac{1}{n})$$

Ejemplo 2.2
Consideremos la distribución de Cauchy con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{(\pi x)^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\pi^{-1}x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi x^2}{\pi(1 + x^2)} = 1$$

y por lo tanto $\overline{F}(x) \sim (\pi x)^{-1}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} P\Big(M_n \le \frac{nx}{\pi}\Big) &= \Big(1 - \overline{F}\big(\frac{nx}{\pi}\big)\Big)^n \\ &= \Big(1 - \frac{1}{nx} + o(1)\Big)^n \\ &\to \exp\{-x^{-1}\} = \Phi_1(x), \ x > 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3
Consideremos ahora el caso de la distribución estricta de Pareto con parámetro α: $1 - F(x) = x^{-\alpha}$, para $x > 1$. Tenemos

$$\log P\big(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\big) = \log F^n(a_n x + b_n) \sim -n(1 - F(a_n x + b_n)).$$

donde hemos usado que $\log(1-u)$ y $-u$ son asintóticamente equivalentes cuando $u \to 1$. Para el caso de una distribución estricta de Pareto con $b_n = 0$,

$$-n(1 - F(a_n x + b_n)) = -n(a_n x)^{-\alpha}.$$

Escogiendo $a_n^\alpha = n$, o sea, $a_n = n^{1/\alpha}$ y $b_n = 0$ obtenemos que

$$P\big(\frac{M_n}{a_n} \leq x\big) \to \exp\{-x^{-\alpha}\}$$

cuando $n \to \infty$, es decir, converge a la distribución de Fréchet. Observamos que para esta distribución

$$Q(1 - \frac{1}{n}) = n^{1/\alpha} = a_n.$$

Densidades

Las densidades correspondientes a las distribuciones de valores extremos son las siguientes:

$$\begin{aligned}
&(a)\ \text{Tipo I:} && g_1(x) = \Lambda(x)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}\\
&(b)\ \text{Tipo II:} && g_2(x) = \alpha\Phi_\alpha(x)x^{-(1+\alpha)}, \quad x \geq 0\\
&(c)\ \text{Tipo III:} && g_3(x) = |\alpha|\Psi_\alpha(x)(-x)^{\alpha-1}, \quad x \leq 0
\end{aligned}$$

Las distribuciones de valores extremos son unimodales. Las densidades de Fréchet y Gumbel son sesgadas a la derecha. Las densidades Weibull son sesgadas a la izquierda si $\alpha > -3.6$ y sesgadas a la derecha si $\alpha < -3.6$. Para α cercano a -3.6 son aproximadamente simétricas. La densidad Weibull tiene un polo en 0 si $\alpha > -1$.

Parámetros de Ubicación y Escala

Cada una de las distribuciones de valores extremos representa en realidad una familia de distribuciones en el sentido de la definición 1.1, según los valores de los parámetros μ y σ de ubicación y escala.

$$(a)\ \text{Tipo I:} \quad \Lambda_{\mu,\sigma}(x) = \exp(-e^{-(x-\mu)/\sigma}) \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$(b)\ \text{Tipo II:} \quad \Phi_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} 0 & x < \mu \\ \exp(-((x-\mu)/\sigma)^{-\alpha}) & x \geq \mu \end{cases} \quad \text{para algún } \alpha > 0.$$

$$(c)\ \text{Tipo III:} \quad \Psi_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp(-(-(x-\mu)/\sigma)^{\alpha}) & x < \mu \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{para algún } \alpha > 0.$$

Vemos que μ es el extremo izquierdo para la distribución de Fréchet y el extremo derecho para la distribución de Weibull. Las densidades correspondientes son

$$g_{i,\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}g_i(\frac{x-\mu}{\sigma}) \quad i = 1, 2, 3.$$

2.1.1. Parametrización de Jenkinson-von Mises

Los tres tipos de distribución del teorema pueden ser combinados en una sola distribución con parametrización común, propuesta por Von Mises (1954) y Jenkinson (1955), que se conoce como la Distribución de Valores Extremos Generalizada o GEV por sus siglas en inglés. La forma de esta distribución es

$$G_\xi(x) = \exp\Big\{ -\big(1+\xi x\big)_+^{-1/\xi} \Big\}, \tag{2.13}$$

o incluyendo los parámetros de localización y escala μ y σ,

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \exp\Big\{ -\big(1+\xi(\frac{x-\mu}{\sigma})\big)_+^{-1/\xi} \Big\}$$

donde $y_+ = \max\{y, 0\}$. Para $\xi > 0$ tenemos la distribución de Fréchet (Tipo II) con $\alpha = 1/\xi$. Para $\xi < 0$ tenemos la distribución de Weibull (Tipo III) con $\alpha = -1/\xi$ y la distribución de Gumbel (Tipo I) aparece como límite cuando $\xi \to 0$. El parámetro ξ se conoce como el parámetro de forma.

Observamos que en la parametrización (2.13), para $\xi = 0$ tenemos la distribución de Gumbel típica, para $\xi = 1/\alpha \neq 0$ obtenemos la distribución de Fréchet ($\xi > 0$) o de Weibull ($\xi < 0$) con parámetros de ubicación y escala $-\alpha$, $|\alpha|$, respectivamente. La distribución de Weibull tiene extremo derecho $-1/\xi$ mientras que la de Fréchet tiene extremo izquierdo $-1/\xi$. Las densidades correspondientes en estos dos casos son

$$g_\xi(x) = G_\xi(x)(1+\xi x)^{-(1+1/\xi)}, \quad 1+\xi x > 0,\ \xi \neq 0.$$

Es posible verificar también que $g_\xi(x) \to g_1(x)$ cuando $\xi \to 0$.

2.2. Max-Estabilidad

Definición 2.1 Una f.d. es max-estable si para cada n existen constantes b_n y $a_n > 0$ tales que

$$F^n(a_n x + b_n) = F(x).$$

Por lo tanto, una transformación lineal hace que el máximo tenga la misma distribución F. La conexión con las DVE está dada por el siguiente teorema, cuya demostración es consecuencia de la demostración del teorema 2.1

Teorema 2.2 *Una distribución es max-estable si y sólo si es del mismo tipo que una DVE.*

Para las DVE típicas las constantes correspondientes son

Gumbel	Λ	$a_n = 1,$	$b_n = \log n$
Fréchet	$\Phi_\alpha,\ \alpha > 0$	$a_n = n^{1/\alpha}$	$b_n = 0$
Weibull	$\Psi_\alpha,\ \alpha < 0$	$a_n = n^{-1/\alpha}$	$b_n = 0$

Por ejemplo, $\Phi_\alpha^n(xn^{1/\alpha}) = \Phi_\alpha(x)$.

2.3. Existencia de Límites no Degenerados

Vamos a considerar relaciones de la forma

$$P(M_n \leq u_n) \tag{2.14}$$

para sucesiones generales (u_n) (en el caso de transformaciones de ubicación y escala $u_n = u_n(x) = a_n x + b_n$). Queremos ahora hallar condiciones sobre F que aseguren que exista el límite de $P(M_n \le u_n)$ cuando $n \to \infty$ para una sucesión apropiada de constantes u_n. Comenzamos con un resultado elemental pero importante

Proposición 2.1 (Aproximación de Poisson) *Dado $\tau \in [0, \infty]$ y una sucesión (u_n) de números reales las siguientes dos relaciones son equivalentes*

$$n\overline{F}(u_n) = n(1 - F(u_n)) \to \tau, \tag{2.15}$$

$$P(M_n \le u_n) = F^n(u_n) \to e^{-\tau}. \tag{2.16}$$

Demostración.
Consideremos primero $0 \le \tau < \infty$. Si (2.15) vale entonces

$$P(M_n \le u_n) = F^n(u_n) = (1 - \overline{F}(u_n))^n = \Big(1 - \frac{\tau}{n} + o(\frac{1}{n})\Big)^n,$$

que implica (2.16). Recíprocamente, si (2.16) vale entonces $\overline{F}(u_n) \to 0$ porque si no, para alguna subsucesión (n_k) y algún $\varepsilon > 0$, $\overline{F}(u_{n_k}) > \varepsilon$ para todo k y $P(M_{n_k} \le u_{n_k}) = (1 - \overline{F}(u_{n_k}))^{n_k} \to 0$ cuando $n_k \to \infty$, lo cual contradice (2.16). Tomando logaritmos en (2.16) tenemos

$$-n \log(1 - \overline{F}(u_n)) \to \tau.$$

Como $\log(1 - x) \sim x$ para $x \to 0$, esto implica que $n\overline{F}(u_n) = \tau + o(1)$, y por lo tanto (2.15) es cierta.
Si $\tau = \infty$ y (2.15) vale pero (2.16) no, debe haber una subsucesión (n_k) tal que $P(M_{n_k} \le u_{n_k}) \to \exp\{-\tau'\}$ cuando $k \to \infty$ para algún $\tau' < \infty$. Pero entonces, por lo que acabamos de demostrar en el caso finito, $n_k\overline{F}(u_{n_k}) \to \tau' < \infty$, lo cual contradice (2.15) con $\tau = \infty$. De manera similar (2.16) implica (2.15) para $\tau = \infty$. ■

Observación 2.3

1. El teorema de aproximación de Poisson está detrás de la demostración anterior. Supongamos, para simplificar que $0 < \tau < \infty$ y definamos $B_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i > u_n\}}$. Esta cantidad tiene una distribución binomial con parámetros $(n, \overline{F}(u_n))$. Una aplicación del teorema de aproximación de Poisson dice que $B_n \to_w \mathcal{P}ois(\tau)$ si y sólo si $\mathrm{E}(B_n) = n\overline{F}(u_n) \to \tau$, que no es otra cosa que (2.15). Además $P(M_n \le u_n) = P(B_n = 0) \to \exp\{-\tau\}$. Esta es la razón por la que (2.16) se conoce a veces como la aproximación de Poisson para $P(M_n \le u_n)$.

2. Si existe una sucesión $(u_n^{(\tau)})$ que satisfaga (2.15) para algún valor fijo y positivo de τ, entonces podemos hallar una sucesión para cualquier otro valor $\tau > 0$. Por ejemplo, si $(u_n^{(1)})$ satisface (2.15) con $\tau = 1$, $(u_n^{(\tau)}) = (u_{[n/\tau]}^{(1)})$ satisface (2.15) para $\tau > 0$.

Corolario 2.1 *Supongamos que $\omega(F) < \infty$ y*

$$\overline{F}(\omega(F)^-) = F(\omega(F)) - F(\omega(F)^-) > 0.$$

Entonces si para alguna sucesión (u_n) se tiene que

$$P(M_n \le u_n) \to \rho,$$

necesariamente $\rho = 0$ ó $\rho = 1$.

Demostración.

Como $0 \leq \rho \leq 1$, podemos escribir $\rho = \exp\{-\tau\}$ con $0 \leq \tau \leq \infty$. Por la proposición 2.1 tenemos $n\overline{F}(u_n) \to \tau$ cuando $n \to \infty$. Si $u_n < \omega(F)$ para infinitos n tenemos $\overline{F}(u_n) \geq \overline{F}(\omega(F)^-) > 0$ para esos n y por lo tanto $\tau = \infty$. La otra posibilidad es que $u_n \geq \omega(F)$ para todo n suficientemente grande, lo que implica $n\overline{F}(u_n) = 0$, y en consecuencia $\tau = 0$. Por lo tanto $\tau = \infty$ ó 0, y $\rho = 0$ ó 1. ■

Este resultado muestra, en particular, que si una distribución tiene un salto en su extremo derecho, no existe una distribución límite no degenerada para M_n, no importa cual normalización usemos.

Existe un resultado similar para cierto tipo de distribuciones con extremo derecho infinito, como se ve en la siguiente caracterización tomada del libro de Leadbetter, Lindgren y Rootzén, que presentamos sin demostración.

Teorema 2.3 *Sea F una f.d. con $\omega(F) \leq \infty$ y sea $\tau \in (0, \infty)$. Existe una sucesión (u_n) que satisface (2.15) sii*

$$\lim_{x\uparrow\omega(F)} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x^-)} = \lim_{x\uparrow\omega(F)} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x^-)} = 1 \tag{2.17}$$

El resultado anterior vale en particular para distribuciones discretas con $\omega(F) = \infty$. Si los saltos de la f.d. no decaen con suficiente velocidad, entonces no existe una distribución límite no-degenerada para el máximo. Por ejemplo, si X toma únicamente valores enteros y $\omega(F) = \infty$ entonces (2.17) pide que

$$\frac{\overline{F}(n)}{\overline{F}(n-1)} \to 1 \quad \text{cuando } n \to \infty. \tag{2.18}$$

Corolario 2.2 *Sea X una v.a. discreta que toma valores enteros positivos con $P(X = k) = p_k$ y tiene f.d. F. Existen sucesiones de constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ tales que $F^n(a_n x + b_n)$ converge a un límite no degenerado si y sólo si*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{\sum_{j=k}^{\infty} p_j} = 0. \tag{2.19}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}(k)}{\overline{F}(k-1)} &= 1 - \frac{F(k) - F(k-1)}{\overline{F}(k-1)} \\ &= 1 - \frac{p_k}{\sum_{j=k}^{\infty} p_j} \end{aligned}$$

y por lo tanto (2.18) vale si y sólo si (2.19) es cierta.

Ejemplo 2.4 (La Distribución de Poisson)

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k \geq 0,\ \lambda > 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{F}(k)}{\overline{F}(k-1)} &= 1 - \frac{F(k)-F(k-1)}{\overline{F}(k-1)} \\ &= 1 - \frac{\lambda^k}{k!}\Big(\sum_{r=k}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}\Big)^{-1} \\ &= 1 - \Big(1 + \sum_{r=k+1}^{\infty}\frac{k!}{r!}\lambda^{r-k}\Big)^{-1}.\end{aligned}$$

Podemos acotar la última suma de la siguiente manera:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^s}{(k+1)(k+2)\cdots(k+s)} \le \sum_{s=1}^{\infty}\big(\frac{\lambda}{k}\big)^s = \frac{\lambda/k}{1-\lambda/k}, \quad k > \lambda,$$

que va a 0 cuando $k \to \infty$ y por lo tanto $\overline{F}(k)/\overline{F}(k-1) \to 0$. El teorema 2.3 muestra que no existe una distribución límite no-degenerada para el máximo y que no existe límite de la forma $P(M_n \le u_n) \to \rho \in (0,1)$, para ninguna sucesión de constantes (u_n).

Ejemplo 2.5 (La Distribución Geométrica)

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \ge 1,\ 0 < p < 1.$$

En este caso tenemos

$$\frac{\overline{F}(k)}{\overline{F}(k-1)} = 1 - (1-p)^{k-1}\Big(\sum_{r=k}^{\infty}(1-p)^{r-1}\Big)^{-1} = 1-p \in (0,1).$$

y de nuevo no existe límite de la forma $P(M_n \le u_n) \to \rho \in (0,1)$.

Los máximos de variables i.i.d con distribución geométrica juegan un papel importante en el estudio de las rachas de éxitos en un paseo al azar.

Ejemplo 2.6 (La Distribución Binomial Negativa)

$$P(X=k) = \binom{\nu+k-1}{k-1}p^{\nu}(1-p)^{k-1}, \quad k \ge 0,\ 0 < p < 1, \nu > 0.$$

Para $\nu \ge 1$ la distribución binomial negativa generaliza la distribución geométrica: Representa la distribución del tiempo de espera hasta en ν-ésimo éxito.

Es posible demostrar que

$$\frac{\overline{F}(k)}{\overline{F}(k-1)} \le 1-p \in (0,1)$$

y llegamos a la misma conclusión que en los casos anteriores.

2.4. Dominios de Atracción

Sea $\{X_n, n \geq 1\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con función de distribución común F. Sea

$$M_n = \text{máx}\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Definición 2.2 Decimos que la función de distribución F está en el dominio de atracción de la distribución de valor extremo H (notación: $F \in \mathcal{D}(H)$) si existen constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$F^n(a_n x + b_n) = P(M_n \leq a_n x + b_n) \to H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nuestro interés ahora es obtener condiciones necesarias y suficientes para determinar si una f.d. pertenece al dominio de atracción de alguna de las distribuciones de valores extremos. Comenzamos con el siguiente resultado que es consecuencia inmediata de la proposición 2.1

Proposición 2.2 *La f.d. F pertenece al dominio de atracción de la DVE H con constantes de normalización $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(a_n x + b_n) = -\log H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cuando $H(x) = 0$ el límite se interpreta como ∞.

El siguiente concepto define una relación de equivalencia entre las funciones de distribución.

Definición 2.3 Dos f.d. F y G son asintóticamente equivalentes si tienen el mismo extremo derecho, es decir, si $\omega(F) = \omega(G)$, y

$$\lim_{x\uparrow\omega(F)} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c$$

para alguna constante $0 < c < \infty$.

Demostraremos que los dominios de atracción de las DVE son cerrados respecto a esta relación, es decir que si F y G son asintóticamente equivalentes entonces $F \in \mathcal{D}(H)$ si y sólo si $G \in \mathcal{D}(H)$. Más aún, para dos f.d. asintóticamente equivalentes es posible usar las mismas constantes de normalización.

2.5. Funciones de Variación Regular

Definición 2.4 Una función medible $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es de variación regular en ∞ con índice α (notación: $U \in VR_\alpha$ o fvr(α)) si para $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha.$$

α se conoce como el exponente o índice de variación. De manera similar podemos definir funciones de variación regular en 0 y los resultados son equivalentes: $U(x)$ es de variación regular en ∞ sii $U(x^{-1})$ es de variación regular en 0.

Si $\alpha = 0$ decimos que U es de variación lenta, y en general denotaremos estas funciones con la letra L. Si $U \in VR_\alpha$ entonces $U(x)/x^\alpha \in VR_0$ y poniendo $L(x) = U(x)/x^\alpha$ vemos que es posible representar una función de variación regular de índice α como $x^\alpha L(x)$.

Ejemplos 2.7
El ejemplo canónico de fvr(α) es x^α. Las funciones $\log(1+x)$, $\log\log(e+x)$ y $\exp\{(\log(x))^\alpha\}$ para $0<\alpha<1$ son de variación lenta. Cualquier función $L(x)$ con límite finito cuando $x\to\infty$ es de variación lenta. Las funciones e^x y $\cos(x)$ no son de variación regular ni de variación lenta.

Para las aplicaciones que nos van a interesar queremos considerar f.d. cuyas colas sean de variación regular. Por ejemplo,

$$1-F(x)=x^{-\alpha},\quad x\geq 1,\ \alpha>0,$$

y

$$\Phi_\alpha(x)=\exp\{-x^{-\alpha}\},\quad x\geq 0.$$

Esta distribución tiene la propiedad

$$1-\Phi_\alpha(x)\sim x^{-\alpha}\quad \text{cuando } x\to\infty,$$

donde la notación $f(x)\sim g(x)$ quiere decir que $f(x)/g(x)\to 1$ cuando $x\to\infty$. Una ley estable de índice α, $0<\alpha<2$ tiene la propiedad

$$1-F(x)\sim cx^{-\alpha},\quad \text{cuando } x\to\infty,\ c>0$$

y en particular la distribución de Cauchy con densidad $f(x)=1/\pi(1+x^2)$ satisface

$$1-F(x)\sim\frac{1}{\pi x}.$$

Si $N(x)\sim\mathcal{N}(0,1)$ entonces $1-N(x)$ no es de variación regular. Tampoco lo es $1-\Lambda(x)$.

2.6. El Teorema de Karamata

Los siguientes resultados presentan las propiedades de integración de las funciones de variación regular. La integral de una función de este tipo es también de variación regular pero con índice una unidad mayor.

Teorema 2.4 (Karamata)

i) Si $\alpha\geq -1$ entonces $U\in VR_\alpha$ implica que $\int_0^x U(t)dt\in VR_{\alpha+1}$ y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xU(x)}{\int_0^x U(t)dt}=\alpha+1. \tag{2.20}$$

Si $\alpha<-1$ (o si $\alpha=-1$ y $\int_x^\infty U(s)ds<\infty$) entonces $U\in VR_\alpha$ implica $\int_x^\infty U(t)dt$ es finita, $\int_x^\infty U(t)dt\in VR_{\alpha+1}$ y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xU(x)}{\int_x^\infty U(t)dt}=-\alpha-1. \tag{2.21}$$

ii) Si U satisface

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xU(x)}{\int_0^x U(t)dt}=\lambda\in(0,\infty) \tag{2.22}$$

entonces $U\in VR_{\lambda-1}$. Si $\int_x^\infty U(t)dt<\infty$ y

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xU(x)}{\int_x^\infty U(t)dt}=\lambda\in(0,\infty) \tag{2.23}$$

entonces $U\in VR_{-(\lambda+1)}$.

Teorema 2.5 (Representación de Karamata) *Una función $h \in VR_\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ sii puede representarse como*

$$h(x) = c(x) \exp\Big\{ \int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt \Big\} \tag{2.24}$$

para $x > 0$ donde $c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\epsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ y

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in (0, \infty), \qquad \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \alpha. \tag{2.25}$$

2.7. Caracterización de los Dominios de Atracción

2.7.1. Dominio de Atracción de la Distribución de Fréchet

Teorema 2.6 (Gnedenko, 1943) *$F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ si y sólo si $1 - F \in VR_{-\alpha}$. En este caso*

$$F^n(a_n x) \to \Phi_\alpha(x)$$

con

$$a_n = Q\big(1 - \frac{1}{n}\big). \tag{2.26}$$

Observación 2.4 a) Por lo tanto sólo distribuciones con $\omega(F) = \infty$ pueden estar en $\mathcal{D}(\Phi_\alpha)$.
b) Tenemos

$$\begin{aligned} a_n = Q\big(1 - \frac{1}{n}\big) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \geq 1 - F(x)\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\overline{F}(x)} \geq n\} \\ &= \Big(\frac{1}{1-F}\Big)^{\leftarrow}(n) \end{aligned}$$

Demostración.
a) Supongamos que $\overline{F} \in VR_{-\alpha}$ y a_n está definida por (2.26). Veamos que

$$1 - F(a_n) \sim n^{-1}. \tag{2.27}$$

A partir de las relaciones en la parte b) de la observación anterior vemos que

$$1 - F(a_n) \leq \frac{1}{n} \leq 1 - F(a_n^-),$$

o equivalentemente

$$\frac{1 - F(a_n)}{1 - F(a_n^-)} \leq n(1 - F(a_n)) \leq 1. \tag{2.28}$$

Como $\overline{F} = 1 - F$ es decreciente y $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, para $\eta < 1$ y n grande $\overline{F}(a_n^-) \leq \overline{F}(a_n \eta)$. Usando esto en (2.28) obtenemos

$$\frac{1 - F(a_n)}{1 - F(a_n \eta)} \leq n(1 - F(a_n)) \leq 1.$$

Pero $\overline{F} = 1 - F \in VR_{-\alpha}$, de modo que para $\varepsilon > 0$ dado, y n grande

$$(1 - \varepsilon)\eta^\alpha \leq n(1 - F(a_n)) \leq 1$$

lo cual muestra (2.27). Ahora, para $x > 0$ tenemos

$$n(1 - F(a_n x)) \sim \frac{1 - F(a_n x)}{1 - F(a_n)} \to x^{-\alpha}$$

cuando $n \to \infty$, ya que $a_n \to \infty$. Por la proposición 2.1 $F^n(a_n x) \to \exp\{-x^{-\alpha}\}$. Si $x < 0$ entonces $F^n(a_n x) \leq F^n(0) \to 0 = \Phi_\alpha(x)$, ya que la variación regular de la cola en infinito requiere que $F(0) < 1$.

b) Recíprocamente, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = \Phi_\alpha(x) \tag{2.29}$$

para todo $x > 0$ y para sucesiones apropiadas $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_{[ns]}x + b_{[ns]}) = \Phi_\alpha^{1/s}(x) = \Phi(s^{1/\alpha}x), \quad s > 0, x > 0.$$

Por el teorema de convergencia a familias de distribuciones tenemos

$$\frac{a_{[ns]}}{a_n} \to s^{1/\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{b_{[ns]} - b_n}{a_n} \to 0. \tag{2.30}$$

Supongamos primero que $b_n = 0$, es decir

$$\lim_n F^n(a_n x) = \Phi_\alpha(x). \tag{2.31}$$

Tomando logaritmos en (2.31) vemos que

$$\lim_n n \log F(a_n x) = -x^{-\alpha}. \tag{2.32}$$

Como $a_n > 0$ y $0 < \Phi_\alpha(x) < 1$ para todo $x > 0$, $\omega(F) = \infty$ porque si no podríamos escoger $x > 0$ tal que $a_n x > \omega(F)$ para todo n, y esto contradice (2.31).

Definimos ahora una subsucesión de índices de la siguiente manera: para $s > 1$ definimos $n(1) = r$ con $r(s-1) > 1$ y $n(k+1) = [n(k)s]$. Es claro que $n(k) \to \infty$ y las relaciones en (2.30) implican

$$\frac{a_{n(k+1)}}{a_{n(k)}} \to s^{1/\alpha} > 1, \qquad \frac{b_{n(k+1)} - b_{n(k)}}{a_{n(k)}} \to 0. \tag{2.33}$$

Por lo tanto, para k grande, $a_{n(k)}$ es creciente y $a_{n(k)} \to \infty$. Así, para t suficientemente grande, existe k con $a_{n(k)} \leq t < a_{n(k+1)}$ y entonces, para $x > 0$

$$F(a_{n(k)}x) \leq F(tx) \leq F(a_{n(k+1)}x). \tag{2.34}$$

Estas desigualdades se mantienen si tomamos logaritmos. Además, para y suficientemente grande, $\log F(y)$ está definido y es negativo. Tomando logaritmos en (2.34) para $x > 0$ y $x = 1$ y para t suficientemente grande, obtenemos

$$\frac{\log F(a_{n(k)}x)}{\log F(a_{n(k+1)})} \geq \frac{\log F(tx)}{\log F(t)} \geq \frac{\log F(a_{n(k+1)}x)}{\log F(a_{n(k)})}. \tag{2.35}$$

Ahora

$$\frac{\log F(a_{n(k)}x)}{\log F(a_{n(k+1)})} = \frac{n(k)\log F(a_{n(k)}x)}{n(k+1)\log F(a_{n(k+1)})}\frac{n(k+1)}{n(k)} \to s\frac{-x^{-\alpha}}{-1} = sx^{-\alpha}$$

cuando $k \to \infty$. Una relación similar es cierta para la fracción que aparece a la derecha de (2.35) con s reemplazado por $1/s$. Como $s > 1$ es arbitrario concluimos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log F(tx)}{\log F(t)} = x^{-\alpha}.$$

Si tomamos en cuenta que $-\log x \sim 1 - x$ cuando $x \to 1$, esta relación es equivalente a pedir que $1 - F \in VR_{-\alpha}$.

Si $b_n \neq 0$ entonces es necesario mostrar que $b_n/a_n \to 0$. Si esto vale, por el corolario 1.1 podemos reemplazar la sucesión b_n por 0 y usar el argumento anterior. En realidad basta hacerlo para la subsucesión $n(k)$ que hemos definido. Poniendo $b_{n(0)} = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{b_{n(k)}}{a_{n(k)}} &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{b_{n(j+1)} - b_{n(j)}}{a_{n(k)}} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{b_{n(j+1)} - b_{n(j)}}{a_{n(j)}} \frac{a_{n(j)}}{a_{n(k)}} \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{M} + \sum_{j=M+1}^{k-1} \Big) \frac{b_{n(j+1)} - b_{n(j)}}{a_{n(j)}} \frac{a_{n(j)}}{a_{n(k)}} = \Sigma_1 + \Sigma_2 \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ escogemos M de modo que para todo $j > M$,

$$\left| \frac{b_{n(j+1)} - b_{n(j)}}{a_{n(j)}} \right| < \varepsilon,$$

lo cual es posible por (2.33). Por otro lado, como $\alpha > 0$, $s^{-1/\alpha} < 1$ y en consecuencia, para cualquier q con $s^{-1/\alpha} < q < 1$,

$$\frac{a_{n(j)}}{a_{n(k)}} \leq \text{Const}\, q^{n(k)-n(j)} \leq \text{Const}\, q^{n(k)-n(M)}$$

para $j \leq M$. Por lo tanto,

$$|\Sigma_1| \leq c_M q^{n(k)-n(M)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

para cualquier M fijo. Además

$$|\Sigma_2| < \varepsilon\, \text{Const} \sum_{j=M+1}^{k-1} q^{n(k)-n(j)} < \varepsilon\, \text{Const} \sum_{j=0}^{\infty} q^t = \frac{C\varepsilon}{1-q}.$$

Por lo tanto $b_{n(k)}/a_{n(k)} \to 0$.

■

Observamos que esta clase de f.d. tiene distribuciones con colas muy pesadas en el sentido de que $\mathrm{E}(X_+)^\delta = \infty$ para $\delta > \alpha$.

El siguiente resultado presenta condiciones que son más sencillas de verificar si la f.d. F tiene densidad. La demostración es una aplicación inmediata del teorema de Karamata.

Teorema 2.7 (Condición de Von Mises) *Sea F absolutamente continua con densidad positiva f en alguna vecindad de ∞.*

a) Si para algún $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x f(x)}{1 - F(x)} = \alpha \tag{2.36}$$

entonces $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$. Podemos escoger a_n de modo que $a_n f(a_n) \sim \alpha/n$.

b) Si f es no-creciente y $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ entonces (2.36) vale.

El próximo resultado muestra la clausura del dominio de atracción de esta ley con respecto a equivalencia asintótica.

Proposición 2.3 *Sean F y G f.d. y supongamos que $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ con constantes de normalización $a_n > 0$, es decir*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x) = \Phi_\alpha(x), \quad x > 0. \tag{2.37}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} G^n(a_n x) = \Phi_\alpha(ax), \quad x > 0.$$

para algún $a > 0$ si y sólo si F y G son asintóticamente equivalentes con

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = a^\alpha.$$

Demostración.
Veremos sólo la demostración de la suficiencia. Para la demostración de la necesidad pueden consultar el libro de Resnick, Prop. 1.19.

Supongamos que $\overline{F}(x) \sim q\overline{G}(x)$ cuando $x \to \infty$ para algún $q > 0$. Por la proposición 2.1 la relación (2.37) es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(a_n x) = x^{-\alpha}$$

para todo $x > 0$. Para estos valores de x, $a_n x \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto, por equivalencia asintótica,

$$n\overline{G}(a_n x) \sim nq^{-1}\overline{F}(a_n x) \to q^{-1}x^{-\alpha},$$

y de nuevo, usando la proposición 2.2,

$$\lim_{n\to\infty} G^n(a_n x) = \exp\Big\{ -\big(q^{1/\alpha}x\big)\Big\}.$$

Basta ahora poner $a = q^{1/\alpha}$. ■

Ejemplo 2.8
Las distribuciones de Pareto (estricta), Cauchy y las estables con exponente $\alpha < 2$ pertenecen a la clase de las distribuciones generalizadas de Pareto, que satisfacen

$$\overline{F}(x) \sim Kx^{-\alpha}, \quad x \to \infty,$$

para algún $K, \alpha > 0$. Por los resultados anteriores $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ ya que $\overline{F} \in VR_{-\alpha}$ y podemos escoger como constantes de normalización $a_n = (Kn)^{1/\alpha}$. En consecuencia

$$(Kn)^{-1/\alpha} M_n \to_w \Phi_\alpha.$$

Otra distribución que pertenece a la clase de las distribuciones generalizadas de Pareto, y por lo tanto satisface la relación anterior, es la de Burr:

$$\overline{F}(x) = \Big(\frac{\kappa}{\kappa + x^\tau}\Big)^\alpha, \quad \alpha, \kappa, \tau > 0.$$

Ejemplo 2.9 (Distribución Loggamma)
La distribución loggamma tiene cola

$$\overline{F}(x) \sim \frac{\alpha^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(\log x)^{\beta-1}x^{-\alpha}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

cuando $x \to \infty$. Por lo tanto $\overline{F} \in VR_{-\alpha}$ que equivale a $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$. Usando la relación (2.27) obtenemos

$$\alpha \log a_n - (\beta - 1)\log\log a_n - \log(\alpha^{\beta-1}/\Gamma(\beta)) = \log n. \tag{2.38}$$

La solución satisface

$$\log a_n = \alpha^{-1}(\log n + \log r_n),$$

donde $\log r_n = o(\log n)$ cuando $n \to \infty$. Reemplazamos esta expresión en la ecuación (2.38) y obtenemos

$$\log r_n = (\beta - 1)\log(\alpha^{-1}\log n(1 + o(1))) + \log(\alpha^{\beta-1}/\Gamma(\beta)).$$

Obtenemos las constantes de normalización

$$a_n \sim \big((\Gamma(\beta))^{-1}(\log n)^{\beta-1}n\big)^{1/\alpha},$$

y por lo tanto

$$\big((\Gamma(\beta))^{-1}(\log n)^{\beta-1}n\big)^{-1/\alpha}M_n \to_w \Phi_\alpha.$$

El teorema de representación de Karamata para funciones de variación regular implica que toda función de distribución en $\mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ es asintóticamente equivalente a una f.d. absolutamente continua que satisface la condición de von Mises. Podemos resumir esto de la siguiente manera: El dominio de atracción de Φ_α consiste de las f.d. que satisfacen la condición de von Mises y las f.d. que son asintóticamente equivalentes a ellas.

2.7.2. Dominio de Atracción de la Distribución de Weibull

Teorema 2.8 (Gnedenko, 1943) *$F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$ si y sólo si $\omega_F < \infty$ y $1 - F(\omega_F - x^{-1}) \in VR_{-\alpha}$ cuando $x \to \infty$. En este caso podemos definir*

$$a_n = Q\big(1 - \frac{1}{n}\big) = \Big(\frac{1}{1-F}\Big)^{\leftarrow}(n) \tag{2.39}$$

y tenemos

$$F^n(\omega_F + (\omega_F - a_n)x) \to \Psi_\alpha(x), \quad x < 0.$$

Demostración.
Supongamos que $\omega_F < \infty$ y $1 - F(\omega_F - x^{-1}) \in VR_{-\alpha}$. Definimos

$$F_*(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ F(\omega_F - x^{-1}), & x \geq 0. \end{cases} \tag{2.40}$$

Entonces $1 - F_*(x) \in VR_{-\alpha}$ y por el teorema 2.6 podemos tomar

$$a_n^* = \Big(\frac{1}{1-F_*}\Big)^{\leftarrow}(n)$$

y

$$F_*^n(a_n^* x) \to \Phi_\alpha(x), \quad x > 0$$

es decir,

$$F^n(\omega_F - (a_n^* x)^{-1}) \to \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0$$

y en consecuencia

$$F^n(\omega_F + a_n^{*-1} y) \to \exp\{-(-y)^\alpha\}, \quad y < 0.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} a_n^* &= \text{ínf}\{u : 1/(1 - F_*(u)) \geq n\} \\ &= \text{ínf}\{u : 1/(1 - F(\omega_F - u^{-1})) \geq n\} \\ &= \text{ínf}\left\{\frac{1}{\omega_F - s} : \frac{1}{1 - F(s)} \geq n\right\} \\ &= 1/(\omega_F - \text{ínf}\{s : 1/(1 - F(s)) \geq n\}) = 1/(\omega_F - a_n) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$F^n(\omega_F + (\omega_F - a_n)y) \to \Psi_\alpha(y), \quad y < 0.$$

Recíprocamente, supongamos que existen sucesiones $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ tales que, cuando $n \to \infty$

$$F^n(a_n x + b_n) \to \Psi_\alpha(x), \quad n \to \infty.$$

Veamos primero que $\omega_F < \infty$. Al igual que en el Teorema 2.6, para $s > 1$

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_{[ns]}x + b_{[ns]}) = \Psi_\alpha^{1/s}(x) = \Psi_\alpha(xs^{-1/\alpha})$$

y por el teorema de convergencia a familias

$$\frac{a_{[ns]}}{a_n} \to s^{-1/\alpha}, \qquad \frac{b_{[ns]} - b_n}{a_n} \to 0$$

Definimos recursivamente una sucesión $n(k)$ como en el teorema 2.6 por $n(1) = r$ con $r(s-1) > 1$ y $n(k+1) = [n(k)s]$. Como $s > 1$, $n(k) \to \infty$, $(k \to \infty)$. Tenemos entonces que

$$\frac{a_{n(k+1)}}{a_{n(k)}} \to s^{-1/\alpha}, \qquad \frac{b_{n(k+1)} - b_{n(k)}}{a_{n(k)}} \to 0.$$

Como $s^{-1/\alpha} < 1$ se tiene de inmediato que $a_{n(k)} \to 0$ $(k \to \infty)$ y

$$b_{n(k+m)} - b_{n(k)} \to 0, \qquad k \to \infty, m \to \infty,$$

de modo que $b_{n(k)}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge a un límite finito que llamaremos b. Tenemos además que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b - b_{n(k)}}{a_{n(k)}} = 0.$$

Por el corolario 1.1 podemos cambiar las constantes cuando restringimos n a la sucesión $n(k)$. Obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} F^{n(k)}(a_{n(k)}x + b) = \Psi_\alpha(x). \tag{2.41}$$

En particular, haciendo $x = 0$ obtenemos que $F(b) = 1$ y por lo tanto $\omega_F \leq b < \infty$. En realidad, $\omega_F = b$: Como $a_{n(k)} \to 0$ $(k \to \infty)$, y como $\Psi_\alpha(x) < 1$ para $x < 0$, $F(x) < 1$ para $x < b$.

Ahora podemos transformar la ecuación (2.41) en (2.31) usando la función F_* definida por (2.40). Hacemos el cambio $y = -1/x$, $a_{n(k)} = 1/c_{n(k)}$ y teniendo en cuenta que $\Psi_\alpha(x) = \Phi_\alpha(y)$ obtenemos que

$$F_*^{n(k)}(c_{n(k)}y) \to \Phi_\alpha(y)$$

Como vimos, (2.31) implica que $F^* \in VR_{-\alpha}$, que es lo que queríamos demostrar.

■

Para este caso también es posible dar una condición más sencilla en el caso en el cual la distribución tiene densidad. La demostración, de nuevo, es una consecuencia del teorema de representación de Karamata.

Teorema 2.9 (Condición de von Mises) *Sea F absolutamente continua con densidad f estrictamente positiva en algún intervalo finito (z, ω_F). Si*

$$\lim_{x \uparrow \omega_F} \frac{(\omega_F - x) f(x)}{\overline{F}(x)} = \alpha > 0,$$

entonces $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$.

Usando la transformación (2.40) podemos reformular la proposición 2.3 de la siguiente manera,

Proposición 2.4 *Sean F y G f.d. con $\omega(F) = \omega(G) < \infty$ y supongamos que $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$ con constantes de normalización $a_n > 0$, es decir*

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n x + \omega_F) = \Psi_\alpha(x), \quad x < 0. \tag{2.42}$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} G^n(a_n x + \omega_G) = \Psi_\alpha(ax), \quad x < 0.$$

para algún $a > 0$ si y sólo si F y G son asintóticamente equivalentes con

$$\lim_{x \uparrow \omega_F} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = a^{-\alpha}.$$

Ejemplo 2.10 (La Distribución Uniforme)
Para la distibución $\mathcal{U}(0,1)$, obviamente $\omega(F) = 1$ y $\overline{F}(1 - 1/x) = 1/x \in VR_{-1}$. Por el teorema 2.8 vemos que $F \in \mathcal{D}(\Psi_1)$. Como $\overline{F}(1 - 1/n) = 1/n$, ponemos $a_n = 1/n$, y entonces

$$n(M_n - 1) \to_w \Psi_1.$$

Ejemplo 2.11
Sea F una f.d. con extremo derecho finito $\omega(F)$ y que satisface

$$\overline{F}(x) = K(\omega_F - x)^\alpha, \quad \omega_F - K^{-1/\alpha} \leq x \leq \omega_F, \quad K, \alpha > 0.$$

Por el teorema 2.8 vemos que $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$. Podemos escoger las constantes de normalización de modo que $\overline{F}(\omega_F - a_n) = n^{-1}$, es decir, $a_n = (Kn)^{-1/\alpha}$, y se tiene

$$(Kn)^{-1/\alpha}(M_n - \omega_F) \to_w \Psi_\alpha.$$

Ejemplo 2.12 (Distribución Beta)
La distribución Beta tiene densidad

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1, \ a, b > 0.$$

Observamos que

$$f\big(1 - \frac{1}{x}\big) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\big(1 - \frac{1}{x}\big)^{a-1} x^{-(b-1)}$$

de modo que $f(1-x^{-1})$ es de variación regular con índice $-(b-1)$ y por el Teorema de Karamata,

$$\overline{F}(1-x^{-1}) = \int_{1-x^{-1}}^{1} f(y)dy = \int_{x}^{\infty} f(1-y^{-1})y^{-2}dy \sim x^{-1}f(1-x^{-1}).$$

En consecuencia $\overline{F}(1-x^{-1})$ es de variación regular con índice $-b$ y

$$\overline{F}(x) \sim \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}(1-x)^{b}, \qquad x \uparrow 1.$$

Por lo tanto la f.d. Beta es asintóticamente equivalente a una f.d. que se comporta como una potencia en $\omega_F = 1$. Por la proposición 2.3 las constantes de normalización se pueden determinar a partir de los resultados del ejemplo anterior con $\alpha = 1$.

Usando de nuevo el teorema de representación de Karamata para funciones de variación regular podemos ver que que las funciones que pertenecen al dominio de atracción de Ψ_α son asintóticamente equivalentes a una f.d. absolutamente continua que satisface la condición de von Mises. Podemos resumir esto de la siguiente manera: El dominio de atracción de Ψ_α consiste de las f.d. que satisfacen la condición de von Mises y las f.d. que son asintóticamente equivalentes a ellas.

2.8. Dominio de Atracción de la Distribución de Gumbel

2.8.1. Funciones de von Mises

Definición 2.5 Sea F una f.d. con extremo derecho $\omega_F \leq \infty$. Supongamos que existe $z < \omega_F$ tal que F tiene representación

$$\overline{F}(x) = c \exp\Big\{ - \int_{z}^{x} \frac{1}{a(t)} dt \Big\}, \quad z < x < \omega_F, \tag{2.43}$$

donde c es una constante positiva, $a(\cdot)$ es una función positiva y absolutamente continua (con respecto a la medida de Lebesgue) con densidad a' y $\lim_{x\uparrow\omega(F)} a'(x) = 0$. Entonces decimos que F es una función de von Mises y que a es la función auxiliar de F.

Observación 2.5 Es interesante comparar la representación (2.43) con la representación de Karamata (2.24) para una fvr. Si ponemos $a(x) = x/\varepsilon(x)$ de modo que $\varepsilon(x) \to \alpha \in [0, \infty)$ cuando $x \to \infty$, (2.43) se convierte en una fvr$(-\alpha)$. Veremos más adelante que la función auxiliar de una una función de von Mises con $\omega_F = \infty$ satisface $a(x)/x \to 0$. Esto quiere decir que $\overline{F}(x)$ decrece a 0 mucho más rápidamente que cualquier potencia.

Ejemplo 2.13 (Distribución Exponencial)

$$\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \lambda > 0.$$

F es una función de von Mises con función auxiliar $a(x) = \lambda^{-1}$.

Ejemplo 2.14 (Distribución de Weibull)

$$\overline{F}(x) = \exp\{-cx^{\tau}\}, \quad x \geq 0, c, \tau > 0.$$

F es una función de von Mises con función auxiliar

$$a(x) = \frac{x^{1-\tau}}{c\tau}, \quad x > 0.$$

Ejemplo 2.15 (Distribución de Erlang)

$$\overline{F}(x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, \quad x \geq 0, \lambda > 0, n \in \mathbb{N}.$$

F es una función de von Mises con función auxiliar

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} \lambda^{-(k+1)} x^{-k}, \quad x > 0.$$

Ejemplo 2.16 (Comportamiento exponencial en el extremo derecho finito)
Sea F una f.d. con extremo derecho finito ω_F y cola

$$\overline{F}(x) = K \exp\Big\{ -\frac{\alpha}{\omega_F - x} \Big\}, \quad x < \omega_F, \quad \alpha, K > 0.$$

F es una función de von Mises con función auxiliar

$$a(x) = \frac{(\omega_F - x)^2}{\alpha}, \quad x < \omega_F.$$

Por ejemplo, para $\omega_F = 1,\ \alpha = 1$ y $K = e$ obtenemos

$$\overline{F}(x) = \exp\Big\{ -\frac{1}{1-x} \Big\}, \quad 0 \leq x < 1.$$

Ejemplo 2.17 (Diferenciabilidad en el extremo derecho)
Sea F una f d con extremo derecho $\omega_F \leq \infty$ y supongamos que existe $z < \omega_F$ tal que F es dos veces diferenciable en (z, ω_F) con densidad (estrictamente) positiva $f = F'$ y $F''(x) < 0$ para $z < x < \omega_F$. Entonces no es difícil ver que F es una función de von Mises con función auxiliar $a = \overline{F}/f$ si y sólo si

$$\lim_{x \uparrow \omega_F} \frac{\overline{F}(x) F''(x)}{f^2(x)} = -1. \tag{2.44}$$

En efecto, sea $z < x < \omega_F$ y ponemos $R(x) = \log \overline{F}(x)$ y $a(x) = 1/R'(x) = \overline{F}(x)/f(x) > 0$. Por lo tanto F tiene representación (2.43) y además

$$a'(x) = -\frac{\overline{F}(x) F''(x)}{f^2(x)} - 1$$

de modo que (2.44) equivale a $a'(x) \to 0$ cuando $x \uparrow \omega_F$.

Definición 2.6 Una función medible y positiva h definida en $(0,\infty)$ es de *variación rápida* con índice $-\infty$, $h \in R_{-\infty}$ si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1, \\ \infty & \text{si } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Como ejemplo de función en esta clase tenemos a $h(x) = e^{-x}$. Las principales propiedades de estas funciones se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.10 *a) Sea $h \in R_{-\infty}$ una función no-creciente, entonces, para algún $z > 0$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\int_z^\infty t^\alpha h(t)dt < \infty,$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1}h(x)}{\int_x^\infty t^\alpha h(t)dt} = \infty. \tag{2.45}$$

Si para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_1^\infty t^\alpha h(t)dt < \infty$ y (2.45) vale, entonces $h \in R_{-\infty}$.

b) Si $h \in R_{-\infty}$ entonces existen funciones c y δ tales que $c(x) \to c_0 \in (0,\infty)$, $\delta(x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ y para algún $z > 0$,

$$h(x) = c(x)\exp\Big\{\int_z^x \frac{\delta(u)}{u}du\Big\}, \quad x \geq z. \tag{2.46}$$

El recíproco también es cierto.

Teorema 2.11 (Propiedades de las funciones de von Mises) *Toda función de von Mises F es absolutamente continua en (z,ω_F) con densidad positiva f. Podemos escoger la función auxiliar como $a(x) = \overline{F}(x)/f(x)$. Además, tenemos las siguientes propiedades*

a) Si $\omega_F = \infty$, entonces $\overline{F} \in R_{-\infty}$ y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\overline{F}(x)} = \infty. \tag{2.47}$$

b) Si $\omega_F < \infty$, entonces $\overline{F}(\omega_F - x^{-1}) \in R_{-\infty}$ y

$$\lim_{x\uparrow\omega_F} \frac{(\omega_F - x)f(x)}{\overline{F}(x)} = \infty. \tag{2.48}$$

Demostración.

A partir de la representación (2.43) obtenemos

$$\frac{d}{dx}(-\log \overline{F}(x)) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1}{a(x)}, \quad z < x < \omega_F.$$

a) Como $a'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, el promedio Césaro de a' también converge:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_z^x a'(t)dt = 0. \tag{2.49}$$

y esto implica (2.47). Aplicando el teorema 2.10(b) obtenemos $\overline{F} \in R_{-\infty}$.

b) Tenemos

$$\lim_{x\uparrow\omega_F}\frac{a(x)}{\omega_F - x} = \lim_{x\uparrow\omega_F}\Big(-\int_x^{\omega_F}\frac{a'(t)}{\omega_F - x}dt\Big) = \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\int_0^s a'(\omega_F - t)dt$$

haciendo un cambio de variables. Como $a'(\omega_F - t) \to 0$ cuanto $t \downarrow 0$, el último límite es 0. Esto implica (2.48), y al igual que en la parte (a), $\overline{F}(\omega_F - x^{-1}) \in R_{-\infty}$. ■

Observación 2.6 A partir de la relación (2.47) se sigue que $\lim_{x\to\infty} x^{-1}a(x) = 0$ y de (2.48) que $a(x) = o(\omega_F - x) = o(1)$ cuando $x \uparrow \omega_F$.

Observamos que $a^{-1}(x) = f(x)/\overline{F}(x)$ se conoce como la tasa de riesgo ('hazard rate') de F.

Ahora podemos demostrar que una función de von Mises está en el dominio de atracción de la distribución de Gumbel.

Teorema 2.12 *Si F es una función de von Mises entonces $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$. Las constantes pueden escogerse de acuerdo a las siguientes fórmulas*

$$b_n = Q(1 - n^{-1}) \quad y \quad a_n = a(b_n), \tag{2.50}$$

donde a es la función auxiliar de F.

Demostración.

La representación (2.43) implica para $t \in \mathbb{R}$ y x suficientemente cerca de ω_F que

$$\frac{\overline{F}(x + ta(x))}{\overline{F}(x)} = \exp\Big\{-\int_x^{x+ta(x)}\frac{1}{a(u)}du\Big\}.$$

Ponemos $v = (u - x)/a(x)$ y obtenemos

$$\frac{\overline{F}(x + ta(x))}{\overline{F}(x)} = \exp\Big\{-\int_0^t\frac{a(x)}{a(x + va(x))}dv\Big\}. \tag{2.51}$$

Ahora veremos que el integrando converge localmente uniformemente (es decir, uniformemente sobre intervalos acotados). Dados $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon)$,

$$|a(x + va(x)) - a(x)| = \left|\int_x^{x+va(x)} a'(s)ds\right| \leq \varepsilon|v|a(x) \leq \varepsilon|t|a(x),$$

donde hemos usado que $a'(x) \to 0$ cuando $x \uparrow \omega_F$. Esto implica que para $x \geq x_0(\varepsilon)$

$$\left|\frac{a(x + va(x))}{a(x)} - 1\right| \leq \varepsilon|t|.$$

Podemos hacer el lado derecho arbitrariamente pequeño y en consecuencia

$$\lim_{x\uparrow\omega_F}\frac{a(x)}{a(x + va(x))} = 1, \tag{2.52}$$

uniformemente en intervalos acotados de valores de v. Esto, junto con (2.51) implica

$$\lim_{x\uparrow\omega_F}\frac{\overline{F}(x + ta(x))}{\overline{F}(x)} = e^{-t} \tag{2.53}$$

uniformemente en intervalos acotados de valores de t. Escogemos ahora las constantes de normalización de acuerdo a (2.50), entonces (2.53) implica

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(ta_n + b_n) = e^{-t} = -\log \Lambda(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Una aplicación de la proposición 2.2 muestra que $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$. ■

2.8.2. Caracterización del Dominio de Atracción de Λ.

La clase de las funciones de von Mises no caracteriza completamente el dominio de atracción de Λ, pero sin embargo, tampoco está muy lejos de la caracterización. El siguiente teorema lo presentamos sin demostración, la cual puede encontrarse en el libro de Resnick.

Teorema 2.13 *La f.d. F con extremo derecho $\omega_F \leq \infty$ pertenece al dominio de atracción de Λ si y sólo si existe algún $z < \omega_F$ tal que F tenga representación*

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp\Big\{ -\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \Big\}, \quad z < x < \omega_F, \tag{2.54}$$

donde c y g son funciones medibles que satisfacen $c(x) \to c > 0$, $g(x) \to 1$ cuando $x \uparrow \omega_F$, y $a(x)$ es una función positiva y absolutamente continua (respecto a la medida de Lebesgue) con densidad $a'(x)$ que satisface $\lim_{x\uparrow\omega_F} a'(x) = 0$.

Para una F con esta representación podemos escoger

$$b_n = Q(1 - n^{-1}), \qquad a_n = a(b_n),$$

como constantes de normalización.

Una posible selección de a es

$$a(x) = \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_x^{\omega_F} \overline{F}(t) dt, \quad x < \omega_F. \tag{2.55}$$

Observación 2.7 Si X es una v.a. con f.d. F, la función a definida por (2.55) es la *función media de exceso* o *vida remanente media*:

$$e(x) = \mathrm{E}(X - x | X > x), \qquad x < \omega_F.$$

Una caracterización alternativa para el dominio de atracción de la distribución de Gumbel está dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.14 *La f.d. F pertenece al dominio de atracción de Λ si y sólo si existe alguna función positiva $\tilde{a}$ tal que*

$$\lim_{x\uparrow\omega_F} \frac{\overline{F}(x + t\tilde{a}(x))}{\overline{F}(x)} = e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.56}$$

Una posible selección de esta función es $\tilde{a} = a$ dada por la ecuación (2.55).

Al igual que en los casos anteriores, el dominio de atracción de la distribución Gumbel también es cerrado respecto a equivalencia asintótica, como indica el siguiente teorema.

Teorema 2.15 *Sean F y G f.d. con igual extremo derecho $\omega_F = \omega_G$ y supongamos que $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ con constantes de normalización $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.57}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} G^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x + b), \quad x \in \mathbb{R}.$$

si y sólo si F y G son asintóticamente equivalentes con

$$\lim_{x\uparrow\omega_F} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = e^b.$$

Demostración.

Igual que antes, haremos sólo la demostración de la suficiencia. La demostración de la necesidad se puede hallar en el libro de Resnick.

Supongamos que $\overline{F}(x) \sim c\overline{G}(x)$ cuando $x \uparrow \omega_F$ para algún $c > 0$. Por la proposición 2.2 (2.57) es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(a_n x + b_n) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para cualquiera de estos x, $a_n x + b_n \to \omega_F$ y por equivalencia asintótica,

$$n\overline{G}(a_n x + b_n) \sim nc^{-1}\overline{F}(a_n x + b_n) \to c^{-1}e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Usando de nuevo la proposición 2.2,

$$\lim_{n\to\infty} G^n(a_n x + b_n) = \exp\{-e^{-(x+\log c)}\} = \Lambda(x + \log c), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Basta ahora poner $b = \log c$. ■

Ejemplo 2.18 (La Distribución Normal)
Llamemos φ la densidad y Φ la f.d. normal típica. Veamos primero que Φ es una función de von Mises, para lo cual verificamos la condición (2.44). Aplicando la regla de l'Hôpital a $\overline{\Phi}(x)/x^{-1}\varphi(x)$ obtenemos la relación $\overline{\Phi}(x) \sim \varphi(x)/x$, conocida como la relación de Mill. Además $\varphi'(x) = -x\varphi(x) < 0$ y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{\Phi}(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = -1.$$

Por (2.44) Φ es una función de von Mises y por el teorema 2.12, $\Phi \in \mathcal{D}(\Lambda)$. Ahora calculamos las constantes de normalización. Usando de nuevo la relación de Mill

$$\overline{\Phi}(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}, \qquad x \to \infty. \tag{2.58}$$

e interpretamos el lado derecho como la cola de una f.d. G. Por el teorema 2.15, Φ y G tienen las mismas contantes de normalización a_n y b_n. Usando la relación (2.50) tenemos $b_n = G^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ y por lo tanto buscamos una solución de $-\log\overline{G}(b_n) = \log n$, es decir,

$$\frac{b_n^2}{2} + \log b_n + \frac{1}{2}\log 2\pi = \log n. \tag{2.59}$$

Haciendo un desarrollo de Taylor obtenemos

$$b_n = (2\log n)^{1/2} - \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2(2\log n)^{1/2}} + o((\log n)^{-1/2}).$$

Podemos tomar como función auxiliar $a(x) = \overline{\Phi}(x)/\varphi(x) \sim x^{-1}$ y por lo tanto

$$a_n = a(b_n) \sim (2\log n)^{-1/2}.$$

Como las constantes están determinadas excepto por equivalencias asintóticas podemos escoger

$$a_n = (2\log n)^{-1/2}, \qquad b_n = (2\log n)^{1/2} - \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2(2\log n)^{1/2}}$$

y por lo tanto,

$$\sqrt{2\log n}\Big(M_n - \sqrt{2\log n} + \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2(2\log n)^{1/2}}\Big) \to_w \Lambda. \tag{2.60}$$

Otra manera útil de calcular las constantes de normalización es usando transformaciones monótonas. Si g es una función creciente e $Y = g(X)$, entonces

$$\widetilde{M}_n = \max(Y_1, \dots, Y_n) = g(M_n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $X \in \mathcal{D}(\Lambda)$ con

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \le a_n x + b_n) = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(\widetilde{M}_n \le g(a_n x + b_n)) = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En algunos casos podemos desarrollar g en serie de Taylor respecto a b_n y los términos lineales son suficientes para obtener la ley límite para $\tilde{M}_n$ con constantes $\tilde{a}_n = a_n g'(b_n)$ y $\tilde{b}_n = g(b_n)$. Aplicamos este método a la distribución lognormal.

Ejemplo 2.19 (Distribución Lognormal)
Sea X una v.a. normal típica y $g(x) = e^{\mu+\sigma x}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Entonces

$$Y = g(X) = e^{\mu+\sigma X}$$

define una v.a. lognormal. Como $X \in \mathcal{D}(\Lambda)$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} P(\widetilde{M}_n \le e^{\mu+\sigma(a_n x + b_n)}) = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde a_n, b_n son las constantes de normalización de la distribución normal típica, que calculamos anteriormente. Esto implica,

$$\lim_{n\to\infty} P(e^{-\mu-\sigma b_n}\widetilde{M}_n \le 1 + \sigma a_n x + o(a_n)) = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como $a_n \to 0$ obtenemos

$$\frac{e^{-\mu-\sigma b_n}}{\sigma a_n}\Big(\widetilde{M}_n - e^{\mu+\sigma b_n}\Big) \to_w \Lambda,$$

de modo que $\widetilde{M}_n \in \mathcal{D}(\Lambda)$ con constantes de normalización

$$\tilde{a}_n = \sigma a_n e^{\mu+\sigma b_n}, \qquad \tilde{b}_n = e^{\mu+\sigma b_n}.$$

2.8.3. Otras Propiedades del Dominio $\mathcal{D}(\Lambda)$.

Corolario 2.3 (Existencia de Momentos) *Supongamos que la v.a. V tiene f.d. $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ con extremo derecho infinito. Entonces $\overline{F} \in R_{-\infty}$. En particular, $\mathrm{E}(X^+)^\alpha < \infty$ para todo $\alpha > 0$, donde $X^+ = \max(0, X)$.*

Demostración. Toda $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ es asintóticamente equivalente a una función de von Mises. Si $\omega_F = \infty$, esta función tiene colas que varían rápidamente, ver proposición 2.11, que también implica la proposición sobre los momentos (ver Teorema A3.12 en el libro de EK&M). ■

Ejemplo 2.20 (Inmersión de $\mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ en $\mathcal{D}(\Lambda)$)
Supongamos que X tiene f.d. $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ con constantes de normalización a_n. Definimos

$$X^* = \log(1 \vee X)$$

con f.d. F^*. Por la proposición 2.2 y el teorema 2.6, $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(a_n x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}(a_n x)}{\overline{F}(a_n)} = x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}^*(\alpha^{-1}x + \log a_n)}{\overline{F}^*(\log a_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}(a_n \exp\{\alpha^{-1}x\})}{\overline{F}(a_n)} = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto $F^* \in \mathcal{D}(\Lambda)$ con constantes de normalización $a_n^* = \alpha^{-1}$ y $b_n^* = \log a_n$. Como función auxiliar se puede tomar

$$a^*(x) = \int_x^\infty \frac{\overline{F}^*(y)}{\overline{F}^*(x)} dy.$$

■

2.9. La Distribución Generalizada de Valores Extremos

Recordemos la Distribución Generalizada de Valores Extremos (GEV o DGVE) o parametrización de von Mises G_ξ que vimos anteriormente: Definimos

$$G_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\xi x)^{-1/\xi}\} & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\{-\exp(-x)\} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

donde se requiere que $1 + \xi x > 0$. En consecuencia el soporte de G_ξ corresponde a

$$\begin{array}{rl} x > -\xi^{-1} & \text{para } \xi > 0, \\ x < -\xi^{-1} & \text{para } \xi < 0, \\ x \in \mathbb{R} & \text{para } \xi = 0. \end{array}$$

Si incluimos parámetros de ubicación $b \in \mathbb{R}$ y escala $a > 0$ obtenemos la familia

$$G_{\xi,a,b}(x) = \begin{cases} \exp\Big\{ -\Big(1 + \xi\big(\frac{x-b}{a}\big)\Big)^{-1/\xi}\Big\} & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\Big\{ -\exp\Big(-\big(\frac{x-b}{a}\big)\Big)\Big\} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

que está definida en el conjunto
$$\{x : 1 + \xi(\frac{x-b}{a}) > 0\}.$$

El parámetro de forma ξ determina la DVE correspondiente: Si $\xi > 0$ la distribución pertenece a una distribución Fréchet con $\alpha = 1/\xi$, $\xi < 0$ corresponde a una distribución Weibull con $\alpha = -1/\xi$ y finalmente $\xi = 0$ corresponde a la familia Gumbel.

Podemos pensar que la DGVE es una familia paramétrica de tres parámetros, forma, ubicación y escala, que se obtiene como la unión de las familias Fréchet, Gumbel y Weibull. En consecuencia podemos reescribir el teorema 2.1 de la siguiente manera

Teorema 2.16 *Si existen sucesiones de constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que*
$$P(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x) \to G(x)$$
cuando $n \to \infty$ para una distribución no degenerada G, entonces G pertenece a la familia DGVE.

La condición $F \in \mathcal{D}(G_\xi)$ nos da la llamada *última aproximación*
$$F^n(a_n x + b_n) \approx G_\xi(x)$$
para constantes apropiadas $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$. Una idea para mejorar la velocidad de convergencia, que en casos como el de la normal es muy lenta, es aproximar el parámetro ξ. Por ejemplo, en el caso Gumbel $\xi = 0$, F tiene representación (2.54) con $a'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. La *penúltima aproximación* consiste en reemplazar ξ por $\xi_n = a'(b_n)$ lo que da la siguiente relación
$$F^n(a_n x + b_n) \approx G_{\xi_n}(x).$$
Típicamente, $\xi_n \neq 0$ de modo que en el caso Gumbel, la penúltima aproximación se basa en una distribución Weibull ($\xi_n < 0$) o Fréchet ($\xi_n > 0$).

El siguiente es uno de los resultados básicos de la teoría de valores extremos que constituye la base de varias técnicas estadísticas que discutiremos posteriormente. A partir de la función de cuantilas definimos
$$U(t) = Q(1 - t^{-1}) = \Big(\frac{1}{\overline{F}}\Big)^{\leftarrow}(t), \qquad t > 0.$$

Teorema 2.17 *Para $\xi \in \mathbb{R}$ las siguientes proposiciones son equivalentes*

a) $F \in \mathcal{D}(G_\xi)$.

b) Existe una función medible y positiva a tal que para $1 + \xi x > 0$,
$$\lim_{u \uparrow \omega_F} \frac{\overline{F}(u + xa(u))}{\overline{F}(u)} = \begin{cases} (1+\xi x)^{-1/\xi} & si\ \xi \neq 0, \\ e^{-x} & si\ \xi = 0. \end{cases} \tag{2.61}$$

c) Para $x, y > 0$, $y \neq 1$,
$$\lim_{s \to \infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} = \begin{cases} \frac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & si\ \xi \neq 0, \\ \frac{\log x}{\log y} & si\ \xi = 0. \end{cases} \tag{2.62}$$

Demostración.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Para $\xi = 0$ esto es el teorema 2.14.

Para $\xi > 0$ tenemos $G_\xi(x) = \Phi_\alpha(\alpha^{-1}(x+\alpha))$ para $\alpha = 1/\xi$. Por el teorema 2.6, (a) es equivalente a $\overline{F} \in VR_{-\alpha}$. Por el teorema de Karamata de representación de funciones de variación regular, para algún $z > 0$,

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp\Big\{ - \int_z^x \frac{1}{a(t)} dt \Big\}, \qquad z < x < \infty,$$

donde $c(x) \to c > 0$ y $a(x)/x \to \alpha^{-1}$ cuando $x \to \infty$, uniformemente localmente. Por lo tanto

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}(u + sa(u))}{\overline{F}(u)} = \Big(1 + \frac{s}{\alpha}\Big)^{-\alpha},$$

que es (2.61). Si (b) vale, escogemos $b_n = U(n)$, entonces

$$\frac{1}{\overline{F}(b_n)} \sim n,$$

y con $u = b_n$ en (2.61),

$$\Big(1 + \frac{x}{\alpha}\Big)^{-\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}(b_n + xa(b_n))}{\overline{F}(b_n)} = \lim_{n\to\infty} n\overline{F}(b_n + xa(b_n)),$$

y por la proposición 2.2, $F \in \mathcal{D}(G_\xi)$ para $\xi = \alpha^{-1}$.

El caso $\xi < 0$ puede tratarse de manera similar.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Nos restringimos al caso $\xi \neq 0$, la demostración para $\xi = 0$ es análoga. Para simplificar, suponemos que F es continua y creciente en $(-\infty, \omega_F)$. Ponemos $s = 1/\overline{F}(u)$, $U(s) = u$ entonces (2.61) se convierte en

$$A_s(x) = \big(s\overline{F}(U(s) + xa(U(s))\big)^{-1} \to (1 + \xi x)^{1/\xi}, \quad s \to \infty.$$

Ahora, para cualquier $s > 0$, $A_s(x)$ es decreciente y para $s \to \infty$ converge a una función continua. Entonces, por la Proposición 1.1, también $A_s^{\leftarrow}(t)$ converge puntualmente al inverso de la función límite correspondiente, es decir,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{U(st) - U(s)}{a(U(s))} = \frac{t^\xi - 1}{\xi}. \tag{2.63}$$

Ahora obtenemos (2.62) usando (2.63) para $t = x$ y $t = y$ y haciendo el cociente. La prueba del recíproco se puede hacer de manera similar. ■

Observación 2.8 La condición (2.61) tiene una interpretación probabilística interesante. Si X es una v.a. con f.d. $F \in \mathcal{D}(G_\xi)$, entonces podemos escribir (2.61) como

$$\lim_{u\uparrow\omega_F} P\Big(\frac{X-u}{a(u)} > x \Big| X > u\Big) = \begin{cases} (1+\xi x)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \tag{2.64}$$

Esta relación nos da una aproximación para la distribución de los excesos sobre niveles altos debidamente normalizados usando como factor de escala $a(u)$. Esta interpretación es fundamental para diversas aplicaciones.

2.10. La Distribución Generalizada de Pareto

Definición 2.7 Sea X una v.a. con f.d. F y extremo derecho ω_F. Para $u < \omega_F$ fijo, decimos que ha ocurrido una *excedencia* de u si $X > u$. Llamamos *excedencia* al valor de X y *exceso* a $X - u$. Llamaremos F_u a la fd de los excesos y $F_{[u]}$ a la fd de las excedencias, que definimos como

$$F_u(x) = F_{[u]}(x+u) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x \geq 0, \tag{2.65}$$

La función

$$e(u) = \mathrm{E}(X - u | X > u)$$

se conoce como la función media de excesos.

La distribución F_u se conoce en otras áreas como la distribución de la *vida residual*, del *exceso de vida* o del *exceso de pérdida*.

Observación 2.9 A partir de la definición de $e(u)$ e integración por partes se obtienen las siguientes fórmulas, que resultan cómodas para calcular la función media de excesos en diversas situaciones. Supongamos, para simplificar, que X es una v.a. positiva con f.d. F y esperanza finita. Entonces

$$e(u) = \int_u^{\omega_F} (x-u) \frac{dF(x)}{\overline{F}(u)} = \frac{1}{\overline{F}(u)} \int_u^{\omega_F} \overline{F}(x) dx, \qquad 0 < u < \omega_F. \tag{2.66}$$

Si F es continua es posible demostrar que

$$\overline{F}(x) = \frac{e(0)}{e(x)} \exp\Big\{ - \int_0^x \frac{1}{e(u)} du \Big\}, \qquad x > 0. \tag{2.67}$$

A partir de (2.67) vemos que una f.d. continua está determinada de manera única por su función media de excesos.

Si $\overline{F} \in VR_{-\alpha}$ para algún $\alpha > 1$, una aplicación del teorema de Karamata dice que $e(u) \sim u/(\alpha - 1)$ cuando $u \to \infty$.

Definición 2.8 Definimos la *Distribución Generalizada de Pareto* estándar (DGP) H_ξ por

$$H_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \tag{2.68}$$

donde

$$\begin{array}{rl} x \geq 0 & \text{si } \xi \geq 0, \\ 0 \leq x \leq -1/\xi & \text{si } \xi < 0. \end{array}$$

Podemos también introducir una familia de ubicación y escala $H_{\xi;\nu,\beta}$ reemplazando el argumento x por $(x - \nu)/\beta$ para $\nu \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Hay que modificar en cada caso el soporte.

Como para las DVE, H_0 puede interpretarse como el límite de H_ξ cuando $\xi \to 0$. La f.d. $H_{\xi;0,\beta}$ jugará un papel importante en el futuro, y para simplificar la notación escribiremos

$$H_{\xi,\beta}(x) = 1 - \Big(1 + \xi \frac{x}{\beta}\Big)^{-1/\xi}, \qquad x \in D(\xi, \beta), \tag{2.69}$$

donde

$$D(\xi,\beta) = \begin{cases} [0,\infty) & \text{si } \xi \geq 0, \\ [0,-\beta/\xi] & \text{si } \xi < 0. \end{cases}$$

Al igual que en el caso de las GEV, hay otra parametrización posible para las DPG.

Tipo I: Exponencial $\quad W_0(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0,$
Tipo II: Pareto $\quad W_{1,\alpha}(x) = 1 - x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \alpha > 0,$
Tipo III: Beta $\quad W_{2,\alpha}(x) = 1 - (-x)^{\alpha}, \quad -1 \leq x \leq 0,\ \alpha > 0.$

Teorema 2.18 (Propiedades de DGP)

a) Supongamos que $X \sim H_{\xi,\beta}$. Entonces $\mathrm{E}(X) < \infty$ si y sólo si $\xi < 1$. En este último caso

$$\mathrm{E}\Big(1 + \frac{\xi}{\beta}X\Big)^{-r} = \frac{1}{1+\xi r}, \quad r > -1/\xi,$$

$$\mathrm{E}\Big(\log\big(1+\frac{\xi}{\beta}X\big)\Big)^{k} = \xi^k k!, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mathrm{E}\left(X(\overline{H}_{\xi,\beta}(X))^r\right) = \frac{\beta}{(r+1-\xi)(r+1)}, \quad \frac{r+1}{|\xi|} > 0.$$

Si $\xi < 1/r$ con $r \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathrm{E}[X^r] = \frac{\beta^r}{\xi^{r+1}} \frac{\Gamma(\xi^{-1} - r)}{\Gamma(1+\xi^{-1})} r!.$$

b) Para $\xi \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{D}(G_\xi)$ si y sólo si

$$\lim_{u \uparrow \omega_F} \sup_{0<x<\omega_F - u} |F_u(x) - H_{\xi,\beta(u)}(x)| = 0 \tag{2.70}$$

para alguna función positiva β.

c) Supongamos que $x_i \in D(\xi,\beta)$, $i = 1,2$, entonces

$$\frac{\overline{H}_{\xi,\beta}(x_1 + x_2)}{\overline{H}_{\xi,\beta}(x_1)} = \overline{H}_{\xi,\beta+\xi x_1}(x_2). \tag{2.71}$$

d) Sea $N \sim \mathcal{P}ois(\lambda)$, independiente de la sucesión i.i.d. (X_n) con DGP de parámetros ξ y β. Escribimos $M_N = \max(X_1,\dots,X_N)$. Entonces

$$P(M_N \leq x) = \exp\Big\{-\lambda\big(1+\xi\frac{x}{\beta}\big)^{-1/\xi}\Big\} = G_{\xi;\mu,\psi}(x),$$

donde $\mu = \beta\xi^{-1}(\lambda^\xi - 1)$ y $\psi = \beta\lambda^\xi$.

e) Supongamos que X tiene una DGP con parámetros $\xi < 1$ y β. Entonces para $u < \omega_F$,

$$e(u) = \mathrm{E}(X - u|X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1-\xi}, \quad \beta + \xi u > 0.$$

Demostración. (a) y (c) siguen por verificación directa.

(b) En el teorema 2.17 demostramos que $F \in \mathcal{D}(G_\xi)$ si y sólo si

$$\lim_{u \uparrow \omega_F} |F_u(x) - H_{\xi,\beta(u)}(x)| = 0$$

donde $\beta(u) = a(u)$. Como las DGP son continuas, la convergencia es uniforme (ver sección 0.1 del libro de Resnick).

(d) Tenemos

$$\begin{aligned} P(M_N \le x) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} H^n_{\xi,\beta}(x) \\ &= \exp\{-\lambda \overline{H}_{\xi,\beta}(x)\} \\ &= \exp\big\{-\lambda\big(1+\xi\frac{x}{\beta}\big)^{-1/\xi}\big\} \\ &= \exp\Big\{-\big(1+\xi\frac{x-\xi^{-1}\beta(\lambda^\xi-1)}{\beta\lambda^\xi}\big)^{-1/\xi}\Big\}, \qquad \xi \neq 0. \end{aligned}$$

El caso $\xi = 0$ se reduce a

$$P(M_N \le x) = \exp\big\{-e^{-(x-\beta\log\lambda)/\beta}\big\}.$$

(e) Esto se obtiene inmediatamente a partir de la representación (2.66). ■

Observación 2.10 1. La propiedad (c) se puede reformular diciendo que la clase de las DGP es cerrada respecto a cambios de umbral. El lado izquierdo de (2.71) es la probabilidad condicional de que, dado que la variable en consideración está por encima de x_1, también está por encima del umbral $x_1 + x_2$. El lado derecho dice que esta probabilidad también es una DGP.

2. La propiedad (b) sugiere que las DGP son aproximaciones adecuadas para la f.d. de excesos F_u para u grande. Este resultado se debe a Pickands y puede reformularse como sigue. Para alguna función β que se estima a partir de los datos,

$$\overline{F}_u(x) = P(X-u > x | X > u) \approx \overline{H}_{\xi,\beta(u)}(x), \quad x > 0.$$

Alternativamente uno considera para $x > u$,

$$P(X > x | X > u) \approx \overline{H}_{\xi;u,\beta(u)}(x).$$

En ambos casos es necesario que u sea suficientemente grande.

En conjunto, (b) y (e) proveen una técnica gráfica para escoger una umbral u suficientemente alto como para que la aproximación de la f.d. de excesos F_u por una DGP se justifique: Dada una muestra i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ construimos una función media de excesos empírica $e_n(u)$ como una versión muestral de la función media de excesos $e(u)$. A partir de (e) vemos que la función media de excesos de una DGP es lineal, y entonces buscamos una región de valores de u donde la gráfica de $e_n(u)$ sea aproximadamente lineal. Para estos valores de u parece razonable aproximar por una DGP.

3. A partir de la proposición 2.2 vemos que el número de excedencias de un umbral alto es aproximadamente Poisson. A partir de la observación anterior concluimos que es posible justificar una aproximación de la f.d. F_u por una DGP. Además, es posible mostrar que el número de excedencias y el valor de los excesos son asintóticamente independientes.

4. La propiedad (d) dice que en un modelo en el cual el número de excedencias es exactamente Poisson y la f.d. de excesos es exactamente una DGP, el máximo de estos excesos tiene como distribución una DVE.

Las observaciones anteriores sugieren el siguiente modelo aproximado para los tiempos de excedencias y los excesos de una muestra i.i.d.

- El número de excedencias de un nivel alto sigue un proceso de Poisson.
- Los excesos sobre niveles altos puede modelarse por una DGP.
- Es posible hallar un valor apropiado del umbral haciendo una gráfica de la función media de excesos empírica.
- La distribución del máximo de un número Poisson de excesos i.i.d. sobre un alto nivel es una DVE.

2.11. Distribuciones Limites para Excedencias

Las DGP son las únicas fd continuas F tales que, para ciertas constantes a_u, b_u se cumple que

$$F_{[u]}(a_u x + b_u) = F(x),$$

donde $F_{[u]}$ es la fd de las excedencias, que definimos en (2.65). Esta propiedad se conoce como la estabilidad para los valores sobre un umbral o pot-estabilidad. Por lo tanto, la versión truncada de una DGP es del mismo tipo que la distribución original, una propiedad que muestra la importancia de las DGP.

El modelaje paramétrico de las fd de excedencias se basa de nuevo en un teorema límite que enunciamos sin demostración.

Teorema 2.19 (Balkema - de Haan) *Si $F_{[u]}(a_u x+b_u)$ tiene una fd límite continua cuando $u \to \omega(F)$ de F, entonces*

$$|F_{[u]}(x) - H_{\gamma,u,\sigma_u}(x)| \to 0, \qquad u \to \omega(F), \tag{2.72}$$

para parámetros de forma, ubicación y escala γ, u y σ_u.

Observamos que la fd de excedencias $F_{[u]}$ y la DGP aproximante tienen el mismo extremo izquierdo u. Si (2.72) vale decimos que F pertenece al dominio de atracción (pot) de H_γ.