Introducción a la Teoría de Valores Extremos

1. Introducción
y
Fundamentos Matemáticos

Joaquín Ortega Sánchez

Centro de Investigación en Matemáticas, CIMAT
Guanajuato, Gto., Mexico

Octavo Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística
Montevideo, Octubre 2008

Introducción

Esquema del Curso

1. Introducción y Fundamentos Matemáticos
2. Métodos Estadísticos: Máximos por Bloques
3. Métodos Estadísticos: Valores sobre un Umbral
4. Tópicos Adicionales, Software y Estudio de Casos.

Outline

Introducción

Distribución del Máximo

Teorema de Convergencia a Familias

Distribuciones de Valores Extremos

Límites No-Degenerados

Dominios de Atracción

CIMAT

Outline

Introducción

Distribución del Máximo

Teorema de Convergencia a Familias

Distribuciones de Valores Extremos

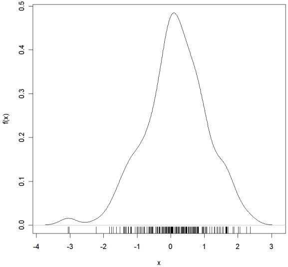
Límites No-Degenerados

Dominios de Atracción

Introducción

El objetivo de la Teoría de Valores Extremos es básicamente la **extrapolación** de información.

En su versión más sencilla, el problema es el siguiente: Dada una muestra independiente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una distribución desconocida F, queremos estimar la cola de F.



Introducción

Los principales problemas son

- Hay pocas observaciones en la cola de la distribución.
- Con frequencia queremos estimar valores que van más allá del máximo valor de la muestra.
- Las técnicas estándar de estimación de densidades ajustan bien donde los datos tienen mayor densidad, pero pueden tener sesgos importantes al estimar las colas.

Introducción

La teoría tiene aplicaciones en muchas áreas, principalmente en ciencias ambientales. Un problema frecuente es el diseño de estructuras que deben resistir algún fenómeno ambiental. Si el fenómeno es muy intenso, la estructura fallará, por lo tanto es necesario diseñarla de modo que la probabilidad de falla sea pequeña.

Ejemplos:

- Nivel del mar
- Velocidad del viento
- Nivel de un río o presa
- Concentración de contaminantes
- Lluvias
- Oleaje

Introducción

Resumen Histórico

- Origen en el artículo de Fisher & Tippet (1928)
- Unificada y extendida en 1940's por Gnedenko
- Primeras aplicaciones estadísticas por Emil Gumbel en los 50's
- Generalizacion de las leyes clásicas por Pickands (1970's)
- Desarrollo de técnicas de estimación y modelación en los 80's y 90's
- Estudio de extremos de procesos más generales y del caso multidimensional a partir de los 80's

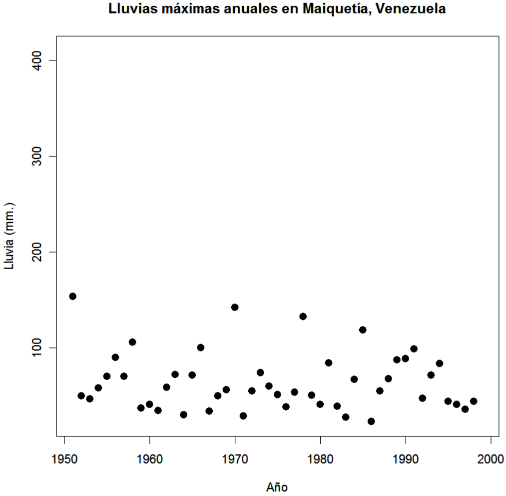
Introducción

Ejemplo 1: Lluvias en Maiquetía, Venezuela

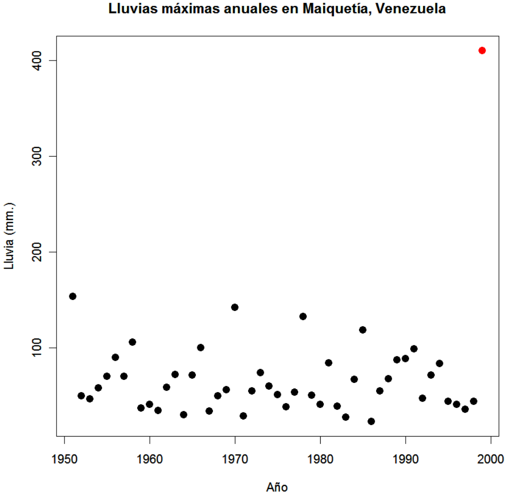
- Ocurridas el 15 de diciembre de 1999.
- Tan intensas que cambiaron la geografía de la costa central de Venezuela
- Humboldt (Viaje a las Regiones Equinocciales del Nuevo Continente) menciona un precedente en febrero de 1797
- Antecedente conocido en 1951. Lluvias causaron 30 muertos y extensos daños materiales en una región que aún estaba prácticamente deshabitada.

Introducción

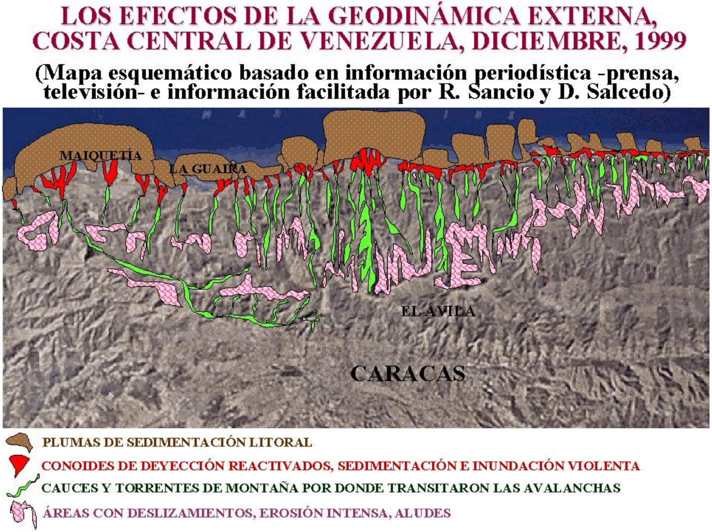
Introducción



Introducción



Introducción



Introducción

Introducción

Introducción

Introducción

Introducción

CIMAT

Introducción

Introducción

Introducción

Introducción

- ¿Hubiese sido posible, con la información previa, predecir este evento, o al menos asignarle algún nivel de plausibilidad?

Introducción

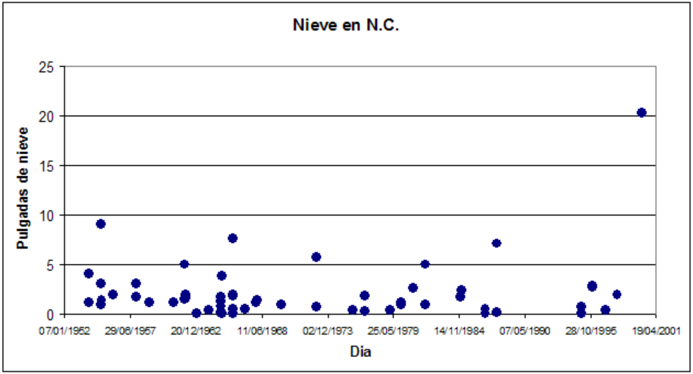
Ejemplo 2: Nieve en Carolina del Norte, U.S.A.

- El 25 de enero de 2000 ocurrió una nevada de 20.3 pulgadas en el aeropuerto de Raleigh-Durham, en Carolina del Norte, USA. Esta cantidad de nieve es excepcionalmente alta para este lugar.
- Estimaciones de la prensa indicaron que un evento de este tipo podría ocurrir una vez cada 100-200 años.
- ¿Cómo podemos estimar la probabilidad de un evento de este tipo usando únicamente la información disponible antes del evento?

Introducción

Año	Día	Nieve	Año	Día	Nieve	Año	Día	Nieve
1948	24	1	1965	15	0.8	1977	7	0.3
1948	31	2.5	1965	16	3.7	1977	24	1.8
1954	11	1.2	1965	17	1.3	1979	31	0.4
1954	22	1.2	1965	30	3.8	1980	30	1.0
1954	23	4.1	1965	31	0.1	1980	31	1.2
1955	19	9	1966	16	0.1	1981	30	2.6
1955	23	3	1966	22	0.2	1982	13	1.0
1955	24	1	1966	25	2	1982	14	5.0
1955	27	1.4	1966	26	7.6	1985	20	1.7
1956	23	2	1966	27	0.1	1985	28	2.4
1958	7	3	1966	29	1.8	1987	25	0.1
1959	8	1.7	1966	30	0.5	1987	26	0.5
1959	16	1.2	1967	19	0.5	1988	7	7.1
1961	21	1.2	1968	10	0.5	1988	8	0.2
1961	26	1.1	1968	11	1.1	1995	23	0.7
1962	1	1.5	1968	25	1.4	1995	30	0.1
1962	10	5	1970	12	1	1996	6	2.7
1962	19	1.6	1970	23	1	1996	7	2.9
1962	28	2	1973	7	0.7	1997	11	0.4
1963	26	0.1	1973	8	5.7	1998	19	2.0
1964	13	0.4	1976	17	0.4	2000	25	20.3

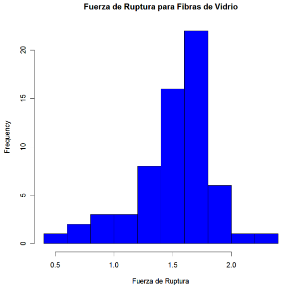
Introducción



Introducción

Ejemplo 3: Ruptura de Fibras de Vidrio.

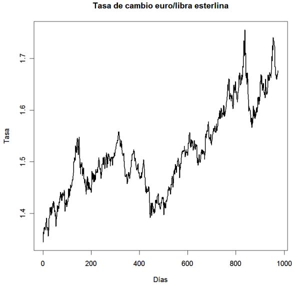
- Datos corresponden a 63 fibras de vidrio de 1.5 cm de longitud. Se determinó la fuerza necesaria para romperlos en condiciones experimentales
- Problema de Confiabilidad

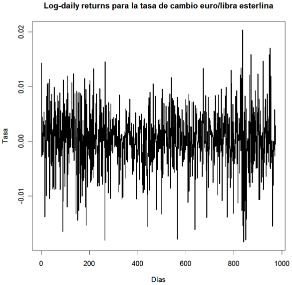


Introducción

Ejemplo 4: Series Financieras.

- Tasa de cambio del euro a la libra esterlina.
- Las tendencias y cambios de nivel en la serie impiden un análisis sencillo.
- Los datos no son estacionarios pero se puede obtener una aproximación a la estacionaridad tomando logaritmo de los cocientes de observaciones sucesivas (log-daily returns).

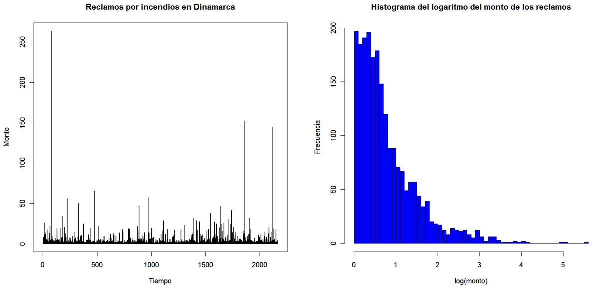




Introducción

Ejemplo 5: Seguros.

- Los datos describen reclamos de gran valor causados por incendios en Dinamarca entre el 3 de enero de 1980 y el 31 de diciembre de 1990
- Pocos datos dominan los montos globales. Indicativo de una distribución de colas pesadas



Outline

Introducción

Distribución del Máximo

Teorema de Convergencia a Familias

Distribuciones de Valores Extremos

Límites No-Degenerados

Dominios de Atracción

Distribución del Máximo

Sea $\{X_n, n \geq 1\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con f.d. común F y definamos

$$M_n = \max_{i \leq n} X_i.$$

La distribución de esta variable aleatoria es

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = F^n(x).$$

Si conocemos F, conocemos la distribución del máximo, pero las expresiones analíticas para F^n pueden ser complicadas. Frecuentemente F es desconocida.

Distribución del Máximo

Aún en este caso deseamos tener una idea de la distribución de M_n, es decir, buscamos una distribución límite que sirva de aproximación a F^n, así como la distribución normal sirve de aproximación a la distribución de la suma de v.a.i. con gran generalidad.
Veamos si esto es posible: Definimos

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\} \geq -\infty,$$
$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\} \leq \infty.$$

Estos puntos son los extremos del soporte de la distribución F

Distribución del Máximo

M_n es una sucesión creciente con límite $\omega(F)$ c.p.1:

Si $x < \omega(F)$ entonces $F(x) < 1$ y en consecuencia

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) \to 0.$$

Si $x > \omega(F)$ entonces $F(x) = 1$ y en consecuencia

$$P(M_n \leq x) = F^n(x) = 1.$$

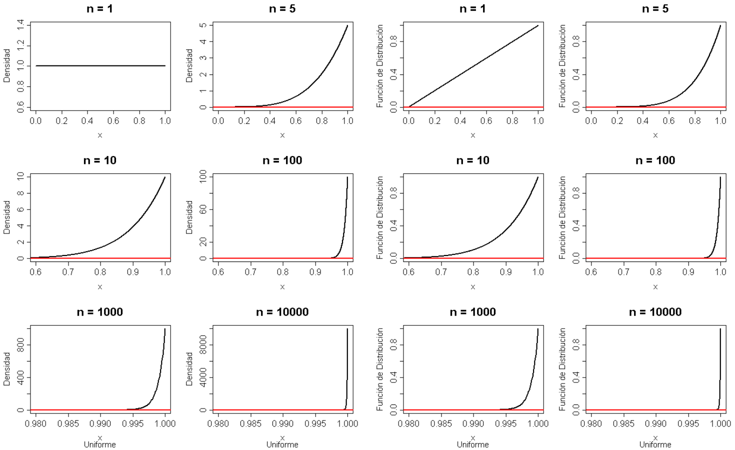
Por lo tanto $M_n \to \omega(F)$ en probabilidad y como la sucesión es creciente, convergencia en probabilidad implica convergencia con probabilidad 1.

Distribución del Máximo

Es decir,

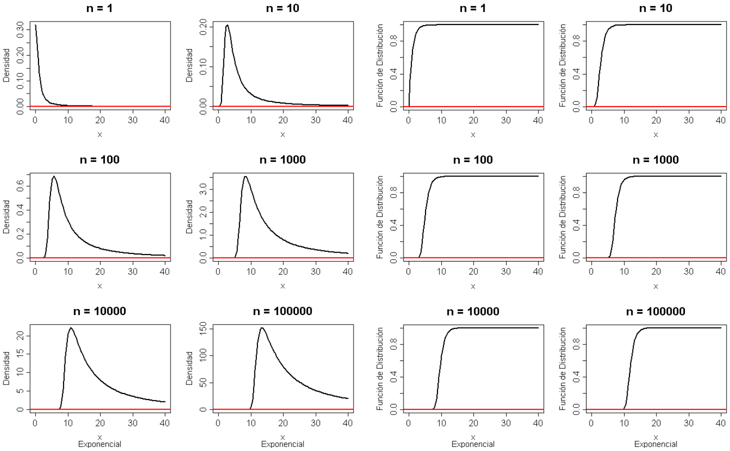
La distribución del máximo **siempre** converge a una distribución degenerada.

Distribución Uniforme



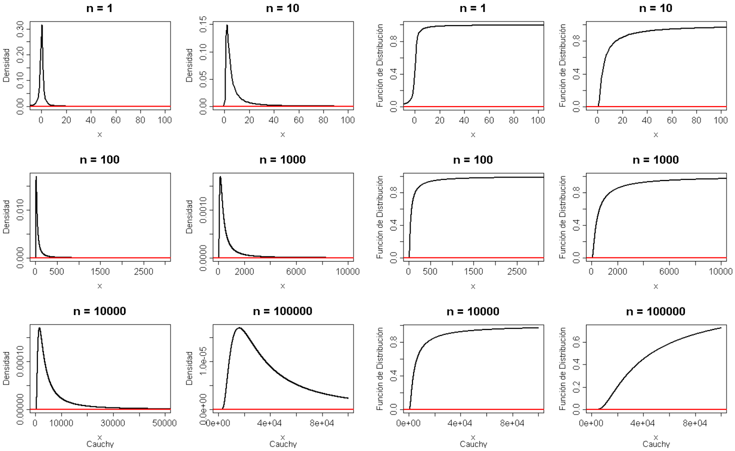
Densidad Función de Distribución

Distribución Exponencial



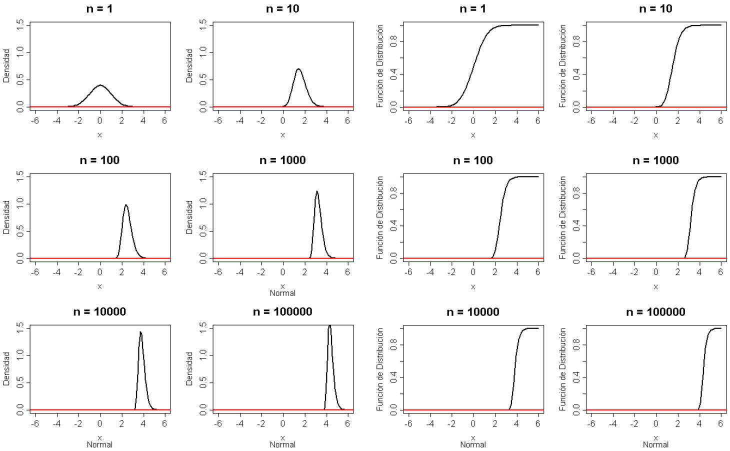
Densidad Función de Distribución

Distribución de Cauchy



Densidad Función de Distribución

Distribución Normal



Densidad Función de Distribución

Distribución del Máximo

Esto es similar a lo que ocurre con las sumas de variables i.i.d. y el Teorema Central del Límite: Por la Ley Fuerte de Grandes Números, si $\mu = \mathrm{E}(X_i)$ entonces

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu$$

pero si hacemos una transformación lineal

$$\frac{\overline{X}_n - \mu_n}{\sigma_n},$$

donde $\mu_n = \mu$ y $\sigma_n = \sigma/\sqrt{n}$, entonces hay convergencia débil a una variable con distribución $N(0,1)$.

Distribución del Máximo

Buscamos un teorema del tipo

$$P(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x) = F^n(a_n x + b_n) \to G(x)$$

débilmente cuando $n \to \infty$ para una distribución límite no-degenerada y nos planteamos las siguientes preguntas

- ¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?
- ¿Cuáles son las constantes a_n y b_n? ¿Son únicas?
- ¿Qué condiciones debe satisfacer F para que se cumpla un resultado así?
- Si hay varias G posibles, ¿Cómo sabemos, conociendo F, cuál de ellas es el límite? ¿Es único?

Función de Distribución Empírica

Sea $X_1 \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una población con f.d. F. Dada la muestra, definimos la función de distribución empírica (f.d.e.) $\widehat{F}_n$ por

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(X_i) = \frac{1}{n} \sharp\{i : X_i \leq x\}$$

$\widehat{F}_n$ es aleatoria y por el teorema de Glivenko-Cantelli sabemos que $\widehat{F}_n$ converge uniformemente a $F(x)$.

Teorema (Glivenko-Cantelli)

Sea $X_1, \dots, X_n$ una colección de v.a.i. con distribución común F y sea $\widehat{F}_n(x) = \widehat{F}_n(x, \omega)$ la función de distribución empírica correspondiente. Entonces

$$\sup_x |\widehat{F}_n(x) - F(x)| \to 0$$

con probabilidad 1.

La Función de Cuantiles

La función de cuantiles (f.c.) Q es la inversa generalizada de F:

$$Q(p) = F^{\leftarrow}(p) = \inf\{s : F(s) \geq p\},$$

para cualquier $p \in (0, 1)$.

Propiedades

1. Q es creciente y continua por la izquierda.
2. $F(Q(y)) \geq y$.
3. $Q(y) \leq t$ sii $y \leq F(t)$; $Q(y) > t$ sii $y > F(t)$.
4. Sea U una v.a. con distribución uniforme en $[0, 1]$ entonces $Q(U(\cdot))$ es una variable aleatoria en $[0, 1]$ con f.d. F:

$$P(Q(U) \leq t) = P(U \leq F(t)) = F(t).$$

Outline

Introducción

Distribución del Máximo

Teorema de Convergencia a Familias

Distribuciones de Valores Extremos

Límites No-Degenerados

Dominios de Atracción

Teorema de Convergencia a Familias

Muchos resultados de convergencia de variables aleatorias son del siguiente tipo: Para una sucesión de v.a. $\xi_n, n \geq 1$ y constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$, se demuestra que

$$\frac{\xi_n - b_n}{a_n} \Rightarrow Y,$$

donde Y es una v. a. no-degenerada. Usando esto tenemos

$$P(\frac{\xi_n - b_n}{a_n} \leq x) \approx P(Y \leq x) = G(x),$$

o poniendo $y = a_n x + b_n$,

$$P(\xi_n \leq y) \approx G(\frac{y - b_n}{a_n}).$$

Esto permite aproximar la distribución de ξ_n por una familia de distribuciones con parámetros de ubicación y escala.

Teorema de Convergencia a Familias

¿Hasta qué punto son únicas estas constantes de normalización a_n y b_n?

Definición 1. Dos distribuciones F y G son *del mismo tipo* o *pertenecen a la misma familia* si para algunas constantes $a > 0, b \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = F(ax + b), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

En términos de v. a., si $X \sim F$ y $Y \sim G$ entonces

$$Y \stackrel{d}{=} \frac{X - b}{a}$$

Por ejemplo, podemos considerar la familia gaussiana. Si $X_{0,1}$ tiene distribución $N(0, 1)$ y $X_{\mu,\sigma}$ tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\mathcal{L}(X_{\mu,\sigma}) = \mathcal{L}(\sigma X_{0,1} + \mu)$.

Teorema de Convergencia a Familias

Teorema (Convergencia a familias, Gnedenko & Khinchin)

Sean $G(x)$ y $H(x)$ dos funciones de distribución propias ($G(\mathbb{R}) = H(\mathbb{R}) = 1$), ninguna de las cuales está concentrada en un punto. Supongamos que para $n \geq 0$, X_n son v.a. con funciones de distribución F_n. Sean, además, constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Teorema de Convergencia a Familias

a) Si

$$F_n(a_n x + b_n) \to G(x), \quad F_n(\alpha_n x + \beta_n) \to H(x) \tag{1}$$

entonces existen constantes $A > 0$ y $B \in \mathbb{R}$ tales que, cuando $n \to \infty$,

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \to A > 0, \quad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \to B, \tag{2}$$

y

$$H(x) = G(Ax + B). \tag{3}$$

b) Recíprocamente, si (2) vale, entonces cualquiera de las relaciones en (1) implica la otra y (3) vale.

Teorema de Convergencia a Familias

Corolario

Sea F_n una sucesión de f. d. y $a_n > 0$ y b_n sucesiones de constantes tales que

$$F_n(a_n x + b_n) \to G(x) \tag{4}$$

en todo punto de continuidad de G, que es una f.d. propia y no está concentrada en un punto. Sean $c_n > 0$ y d_n sucesiones de constantes tales que

$$\frac{a_n}{c_n} \to 1, \qquad \frac{d_n - b_n}{a_n} \to 0.$$

Entonces (4) vale con c_n y d_n en lugar de a_n y b_n.

Outline

Introducción

Distribución del Máximo

Teorema de Convergencia a Familias

Distribuciones de Valores Extremos

Límites No-Degenerados

Dominios de Atracción

Distribuciones de Valores Extremos

¿Cuáles son las distribuciones límite posibles?

Teorema

Supongamos que existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ para $n \geq 1$ tales que

$$P(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x) = F^n(a_n x + b_n) \to G(x) \tag{5}$$

débilmente cuando $n \to \infty$ donde G es propia ($G(\mathbb{R}) = 1$) y no está concentrada en un punto. Entonces G pertenece a algunas de las siguientes tres familias de distribuciones:

Distribuciones de Valores Extremos

$$
\begin{aligned}
(a)\ \text{Gumbel:}\quad \Lambda(x) &= \exp(-e^{-x}) \quad x \in \mathbb{R}. && (6)\\
(b)\ \text{Fréchet:}\quad \Phi_\alpha(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x \geq 0 \end{cases} && (7)\\
(c)\ \text{Weibull:}\quad \Psi_\alpha(x) &= \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}) & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} && (8)
\end{aligned}
$$

En los casos (b) y (c) $\alpha > 0$.

Observación

Este teorema fue originalmente propuesto por Fisher y Tippett en 1928 y demostrado rigurosamente por Gnedenko en 1943.

Distribuciones de Valores Extremos

Observación

- *Las tres distribuciones mencionadas en el teorema se llaman, en conjunto, las distribuciones de valores extremos (DVE).*
- *Observamos que el teorema 3 no garantiza la existencia de un límite no degenerado para M_n, ni nos dice cuál es el límite cuando existe. Lo que sabemos es que, cuando el límite existe, tiene que ser una de las distribuciones incluidas en el teorema, cualquiera sea la distribución inicial F.*

Distribución Exponencial

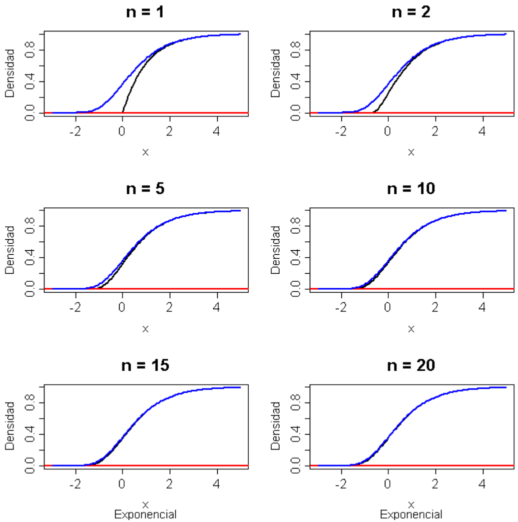
Ejemplos.

Sea F la distribución exponencial de parámetro 1:
$F(x) = 1 - e^{-x}$ para $x > 0$, entonces $F^n(x) = (1 - e^{-x})^n$ y

$$\begin{aligned} F^n(x + \log n) &= (1 - e^{-x-\log n})^n \\ &= \Big(1 - \frac{1}{n} e^{-x}\Big)^n \\ &\to \exp\{-e^{-x}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, con una normalización $a_n = 1$ y $b_n = \log n$,
M_n tiene como límite una distribución Gumbel.

Distribución Exponencial



Distribución de Cauchy

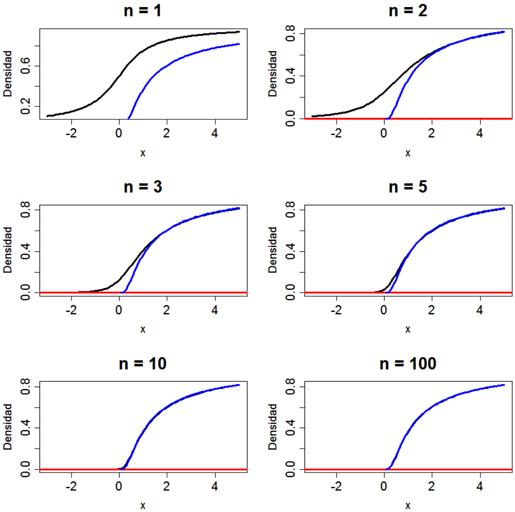
Ejemplos.
Consideremos la distribución de Cauchy con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Sea $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Usando la regla de L'Hôpital es fácil ver que $\overline{F}(x) \sim (\pi x)^{-1}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} P\Big(M_n \leq \frac{nx}{\pi}\Big) &= \Big(1 - \overline{F}\big(\frac{nx}{\pi}\big)\Big)^n \\ &= \Big(1 - \frac{1}{nx} + o(1)\Big)^n \\ &\to \exp\{-x^{-1}\} = \Phi_1(x),\ x > 0. \end{aligned}$$

Distribución de Cauchy



Distribuciones de Valores Extremos

Cada una de las distribuciones de valores extremos representa en realidad una familia de distribuciones en el sentido de la definición 1, según los valores de los parámetros μ y σ de ubicación y escala.

$$(a)\ \text{Gumbel:} \quad \Lambda_{\mu,\sigma}(x) = \exp(-e^{-(x-\mu)/\sigma}) \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$(b)\ \text{Fréchet:} \quad \Phi_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} 0 & x < \mu \\ \exp(-((x-\mu)/\sigma)^{-\alpha}) & x \geq \mu \end{cases}$$

$$(c)\ \text{Weibull:} \quad \Psi_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \exp(-(-(x-\mu)/\sigma)^{\alpha}) & x < \mu \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Vemos que μ es el extremo izquierdo para la distribución de Fréchet y el extremo derecho para la distribución de Weibull.

Distribuciones Generalizada de Valores Extremos

Los tres tipos de DVE pueden ser combinados en una sola distribución con parametrización común, propuesta por von Mises (1954) y Jenkinson (1955), que se conoce como la Distribución Generalizada de Valores Extremos, DGVE o GEV por sus siglas en inglés. La forma de esta distribución es

$$G_\xi(x) = \exp\left\{ -\left(1 + \xi x\right)_+^{-1/\xi} \right\}, \tag{9}$$

donde $y_+ = \max\{y, 0\}$. Para $\xi > 0$ tenemos la distribución de Fréchet con $\alpha = 1/\xi$. Para $\xi < 0$ tenemos la distribución de Weibull con $\alpha = -1/\xi$ y la distribución de Gumbel aparece como límite cuando $\xi \to 0$. El parámetro ξ se conoce como el parámetro de forma.

Distribuciones de Valores Extremos

Si incluimos los parámetros de localización y escala μ y σ, la expresión es

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \exp\left\{ -\left(1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)_{+}^{-1/\xi} \right\}$$

Esta expresión conjunta de las tres distribuciones límite permite hacer inferencia estadística sin seleccionar previamente uno de los tres modelos límites posibles: Weibull, Gumbel o Fréchet.

Outline

Introducción

Distribución del Máximo

Teorema de Convergencia a Familias

Distribuciones de Valores Extremos

Límites No-Degenerados

Dominios de Atracción

Límites No Degenerados

¿Bajo qué condiciones sobre F tenemos convergencia a un límite no-degenerado?

Vamos a considerar relaciones de la forma

$$P(M_n \leq u_n) \tag{10}$$

para sucesiones generales (u_n) (en el caso de transformaciones de ubicación y escala $u_n = u_n(x) = a_n x + b_n$). Queremos ahora hallar condiciones sobre F que aseguren que exista el límite de $P(M_n \leq u_n)$ cuando $n \to \infty$ para una sucesión apropiada de constantes u_n. Comenzamos con un resultado elemental pero importante

Límites No Degenerados

Proposición (Aproximación de Poisson)

Dado $\tau \in [0, \infty]$ y una sucesión (u_n) de números reales las siguientes dos relaciones son equivalentes

$$n\overline{F}(u_n) = n(1 - F(u_n)) \to \tau, \tag{11}$$

$$P(M_n \leq u_n) = F^n(u_n) \to e^{-\tau}. \tag{12}$$

Demostración para $\tau \in [0, \infty)$.
Si (11) vale entonces

$$P(M_n \leq u_n) = F^n(u_n) = (1 - \overline{F}(u_n))^n = \Big(1 - \frac{\tau}{n} + o(\frac{1}{n})\Big)^n,$$

que implica (12).

Límites No Degenerados

Recíprocamente, si (12) vale entonces $\overline{F}(u_n) \to 0$ porque si no, para alguna subsucesión (n_k) y algún $\varepsilon > 0$, $\overline{F}(u_{n_k}) > \varepsilon$ para todo k y $P(M_{n_k} \leq u_{n_k}) = (1 - \overline{F}(u_{n_k}))^{n_k} \to 0$ cuando $n_k \to \infty$, lo cual contradice (12). Tomando logaritmos en (12) tenemos

$$-n\log(1 - \overline{F}(u_n)) \to \tau.$$

Como $\log(1 - x) \sim x$ para $x \to 0$, esto implica que $n\overline{F}(u_n) = \tau + o(1)$, y por lo tanto (11) es cierta.

Límites No Degenerados

Observación

El teorema de aproximación de Poisson está detrás de la demostración anterior:
Supongamos que $0 < \tau < \infty$ *y sea* $B_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i > u_n\}}$.
Entonces $B_n \sim Bin(n, \overline{F}(u_n))$.
Por el teorema de aproximación de Poisson

$$B_n \to_w \mathcal{P}ois(\tau) \Leftrightarrow \mathrm{E}(B_n) = n\overline{F}(u_n) \to \tau,$$

que es (11). Además

$$P(M_n \leq u_n) = P(B_n = 0) \to \exp\{-\tau\}.$$

Por esto (12) se conoce como la aproximación de Poisson para $P(M_n \leq u_n)$.

Límites No Degenerados

Corolario

Supongamos que $\omega(F) < \infty$ *y*

$$\overline{F}(\omega(F)^-) = F(\omega(F)) - F(\omega(F)^-) > 0.$$

Entonces si para alguna sucesión (u_n) *se tiene que* $P(M_n \leq u_n) \to \rho$, *necesariamente* $\rho = 0$ *ó* $\rho = 1$*.*

Este resultado muestra, en particular, que si una distribución tiene un salto en su extremo derecho (finito), no existe una distribución límite no degenerada para M_n, no importa cual normalización usemos.

Límites No Degenerados

La siguiente caracterización, tomada del libro de Leadbetter, Lindgren y Rootzén, incluye distribuciones con extremo derecho infinito.

Teorema

Sea F una f.d. con $\omega(F) \leq \infty$ y sea $\tau \in (0, \infty)$. Existe una sucesión (u_n) que satisface (11)

$$n\overline{F}(u_n) = n(1 - F(u_n)) \to \tau,$$

sii

$$\lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(x^-)} = \lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x^-)} = 1 \tag{13}$$

Límites No Degenerados

El resultado anterior vale en particular para distribuciones discretas con $\omega(F) = \infty$. Si los saltos de la f.d. no decaen con suficiente velocidad, entonces no existe una distribución límite no-degenerada para el máximo.
Por ejemplo, si X toma únicamente valores enteros y $\omega(F) = \infty$ entonces (13) pide que

$$\frac{\overline{F}(n)}{\overline{F}(n-1)} \to 1 \quad \text{cuando } n \to \infty. \tag{14}$$

Límites No Degenerados

Corolario

Sea X una v.a. discreta que toma valores enteros positivos con $P(X = k) = p_k$ y tiene f.d. F. Existen sucesiones de constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ tales que $F^n(a_n x + b_n)$ converge a un límite no degenerado si y sólo si

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{\sum_{j=k}^{\infty} p_j} = 0. \tag{15}$$

Usando este corolario es sencillo demostrar que no existen límites degenerados para las siguientes distribuciones:

- Poisson
- Geométrica
- Binomial Negativa

Outline

Introducción

Distribución del Máximo

Teorema de Convergencia a Familias

Distribuciones de Valores Extremos

Límites No-Degenerados

Dominios de Atracción

Dominios de Atracción

Sea $\{X_n, n \geq 1\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. con función de distribución común F. Sea

$$M_n = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Definición

Decimos que la función de distribución F está en el dominio de atracción de la distribución de valores extremos H (notación: $F \in \mathcal{D}(H)$) si existen constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$F^n(a_n x + b_n) = P(M_n \leq a_n x + b_n) \to H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Queremos obtener condiciones necesarias y suficientes para determinar si una f.d. pertenece al dominio de atracción de alguna de las distribuciones de valores extremos.

Dominios de Atracción

Proposición

La f.d. F pertenece al dominio de atracción de la DVE H con constantes de normalización $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(a_n x + b_n) = -\log H(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cuando $H(x) = 0$ el límite se interpreta como ∞.

Dominios de Atracción

Definición

Una función medible $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es de variación regular en ∞ con índice α (notación: $U \in VR_\alpha$ o fvr(α)) si para $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(t)} = x^\alpha.$$

α se conoce como el exponente o índice de variación.
Si $\alpha = 0$ decimos que U es de variación lenta, y en general denotaremos estas funciones con la letra L. Si $U \in VR_\alpha$ entonces $U(x)/x^\alpha \in VR_0$ y poniendo $L(x) = U(x)/x^\alpha$ vemos que es posible representar una función de variación regular de índice α como $x^\alpha L(x)$.

Dominios de Atracción

- El ejemplo canónico de fvr(α) es x^α.
- Las funciones $\log(x)$, $\log\log(x)$ y $\exp\{(\log(x))^\alpha\}$ para $0 < \alpha < 1$ son de variación lenta.
- Cualquier función $L(x)$ con límite finito cuando $x \to \infty$ es de variación lenta.
- Las funciones e^x y $\cos(x)$ no son de variación regular ni de variación lenta.

Dominios de Atracción

Para las aplicaciones que nos van a interesar queremos considerar f.d. con colas de variación regular. Por ejemplo,

$$1 - F(x) = x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \ \alpha > 0,$$

y

$$\Phi_\alpha(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x \geq 0.$$

Esta distribución tiene la propiedad

$$1 - \Phi_\alpha(x) \sim x^{-\alpha} \quad \text{cuando } x \to \infty,$$

donde la notación $f(x) \sim g(x)$ quiere decir que $f(x)/g(x) \to 1$ cuando $x \to \infty$.

Dominios de Atracción

Dominio de atracción de la distribución Fréchet.

Teorema (Gnedenko, 1943)

$F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ si y sólo si $1 - F \in VR_{-\alpha}$. En este caso

$$F^n(a_n x) \to \Phi_\alpha(x)$$

con

$$a_n = Q(1 - \frac{1}{n}). \tag{16}$$

Observación

Por lo tanto sólo distribuciones con $\omega(F) = \infty$ pueden estar en $\mathcal{D}(\Phi_\alpha)$.

Dominios de Atracción

Ejemplos.
Las distribuciones de Pareto (estricta), Cauchy y las estables con exponente $\alpha < 2$ pertenecen a la clase de las distribuciones generalizadas de Pareto, que satisfacen

$$\overline{F}(x) \sim Kx^{-\alpha}, \quad x \to \infty,$$

para algún $K, \alpha > 0$. Por los resultados anteriores $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ ya que $\overline{F} \in VR_{-\alpha}$ y podemos escoger como constantes de normalización $a_n = (Kn)^{1/\alpha}$. En consecuencia

$$(Kn)^{-1/\alpha} M_n \to_w \Phi_\alpha.$$

Dominios de Atracción

Ejemplos.

La distribución loggamma tiene cola

$$\overline{F}(x) \sim \frac{\alpha^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(\log x)^{\beta-1}x^{-\alpha}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

cuando $x \to \infty$. Por lo tanto $\overline{F} \in VR_{-\alpha}$ que equivale a $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$.

Obtenemos las constantes de normalización

$$a_n \sim \left((\Gamma(\beta))^{-1}(\log n)^{\beta-1}n\right)^{1/\alpha},$$

y por lo tanto

$$\left((\Gamma(\beta))^{-1}(\log n)^{\beta-1}n\right)^{-1/\alpha} M_n \to_w \Phi_\alpha.$$

Dominios de Atracción

Dominio de Atracción de la Distribución Weibull.

Teorema (Gnedenko, 1943)

$F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$ si y sólo si $\omega_F < \infty$ y $1 - F(\omega_F - x^{-1}) \in VR_{-\alpha}$ cuando $x \to \infty$. En este caso podemos definir

$$a_n = Q(1 - \frac{1}{n}) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(n) \tag{17}$$

y tenemos

$$F^n(\omega_F + (\omega_F - a_n)x) \to \Psi_\alpha(x), \quad x < 0.$$

Dominios de Atracción

Ejemplos.

- La Distribución Uniforme. Para la distibución $\mathcal{U}(0,1)$, obviamente $\omega(F) = 1$ y $\overline{F}(1-1/x) = 1/x \in VR_{-1}$. Por el teorema anterior vemos que $F \in \mathcal{D}(\Psi_1)$. Como $\overline{F}(1-1/n) = 1/n$, ponemos $a_n = 1/n$, y entonces

$$n(M_n - 1) \rightarrow_w \Psi_1.$$

- Sea F una f.d. con $\omega(F) < \infty$ que satisface

$$\overline{F}(x) = K(\omega_F - x)^\alpha, \quad \omega_F - K^{-1/\alpha} \leq x \leq \omega_F, \quad K, \alpha > 0.$$

Por el teorema anterior vemos que $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$. Podemos escoger las constantes de normalización de modo que $\overline{F}(\omega_F - a_n) = n^{-1}$, es decir, $a_n = (Kn)^{-1/\alpha}$, y se tiene

$$(Kn)^{-1/\alpha}(M_n - \omega_F) \rightarrow_w \Psi_\alpha.$$

Dominios de Atracción

Dominio de Atracción de la Distribución Gumbel.

Teorema

La f.d. F con extremo derecho $\omega_F \leq \infty$ pertenece al dominio de atracción de Λ si y sólo si existe $z < \omega_F$ tal que

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp\left\{ -\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z < x < \omega_F, \tag{18}$$

donde c y g son funciones medibles que satisfacen $c(x) \to c > 0$, $g(x) \to 1$ cuando $x \uparrow \omega_F$, y $a(x)$ es una función positiva y absolutamente continua (respecto a la medida de Lebesgue) con densidad $a'(x)$ que satisface $\lim_{x \uparrow \omega_F} a'(x) = 0$. Para una F con esta representación podemos escoger

$$b_n = Q(1 - n^{-1}), \qquad a_n = a(b_n),$$

como constantes de normalización.

Dominios de Atracción

Una posible selección de a es

$$a(x) = \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_{x}^{\omega_F} \overline{F}(t)dt, \quad x < \omega_F. \tag{19}$$

Observación

Si X es una v.a. con f.d. F, la función a definida por (19) es la función media de exceso o vida remanente media:

$$e(x) = \mathrm{E}(X - x | X > x), \qquad x < \omega_F.$$

Dominios de Atracción

Ejemplos. La Distribución Normal
Es posible demostrar que la distribución normal pertenece al dominio de atracción de la distribución de Gumbel. Las constantes de normalización se pueden tomar como

$$a_n = (2\log n)^{-1/2}, \qquad b_n = (2\log n)^{1/2} - \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2(2\log n)^{1/2}}$$

y por lo tanto,

$$\sqrt{2\log n}\left(M_n - \sqrt{2\log n} + \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2(2\log n)^{1/2}}\right) \to_w \Lambda. \tag{20}$$

Dominios de Atracción

Ejemplos. La Distribución Lognormal

Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $g(x) = e^{\mu+\sigma x}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Entonces

$$\widetilde{X} = g(X) = e^{\mu+\sigma X}$$

define una v.a. lognormal. Como $X \in \mathcal{D}(\Lambda)$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} P(\widetilde{M}_n \leq e^{\mu+\sigma(a_n x+b_n)}) = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde a_n, b_n son las constantes de normalización de la distribución normal típica. Esto implica,

$$\lim_{n\to\infty} P(e^{-\mu-\sigma b_n}\widetilde{M}_n \leq 1 + \sigma a_n x + o(a_n)) = \Lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como $a_n \to 0$ obtenemos

$$\frac{e^{-\mu-\sigma b_n}}{\sigma a_n}\left(\widetilde{M}_n - e^{\mu+\sigma b_n}\right) \to_w \Lambda,$$

de modo que $\widetilde{M}_n \in \mathcal{D}(\Lambda)$ con constantes de normalización

$$\tilde{a}_n = \sigma a_n e^{\mu+\sigma b_n}, \qquad \tilde{b}_n = e^{\mu+\sigma b_n}.$$

Dominios de Atracción

El siguiente concepto define una relación de equivalencia entre las funciones de distribución.

Definición

Dos f.d. F y G son asintóticamente equivalentes si tienen el mismo extremo derecho, es decir, si $\omega(F) = \omega(G)$, y

$$\lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c$$

para alguna constante $0 < c < \infty$.

Los dominios de atracción de las DVE son cerrados respecto a esta relación, es decir que si F y G son asintóticamente equivalentes entonces $F \in \mathcal{D}(H)$ si y sólo si $G \in \mathcal{D}(H)$. Más aún, para dos f.d. asintóticamente equivalentes es posible usar las mismas constantes de normalización.