Elementos de Probabilidad y Estadística

Primer Examen

Parte 2

Para entregar antes de las 12:30 pm del jueves 13 de marzo de 2014.
Este examen es estrictamente individual.
Puedes consultar libros o notas de clase y puedes preguntar al profesor y a los ayudantes pero no a tus compañeros.

1. (**2 ptos.**) Para iniciar un juego de azar similar al LUDO cada jugador debe lanzar dos dados. El jugador puede comenzar a mover sus fichas si al menos uno de los dados sale 6. En caso contrario debe esperar a que los demás jugadores consuman su turno para volver a lanzar los dados.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de lanzar el primer 6 en el tercer intento?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de necesitar más de tres intentos?

   c) ¿Cuántos intentos hacen falta para que la probabilidad de poder iniciar el juego (haber obtenido al menos un 6) sea mayor o igual a 0.95?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 ocurra en un número par de intentos?

   Respuesta. Veamos primero cuál es la probabilidad de obtener al menos un seis al lanzar dos dados. El espacio muestral de este experimento es el conjunto de los vectores (a, b), donde a, b pueden tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Por lo tanto hay 36 resultados posibles en el espacio muestral, y como los dados se suponen simétricos, todos estos resultados son igualmente probables. De estos 36, hay 11 que tienen al menos un seis, ya que el seis puede aparecer en el primer lugar en seis pares y en el segundo lugar en otros seis pares, pero hemos contado el doble seis dos veces, por lo que hay sólo 11 resultados diferentes. En consecuencia $p = 11/36$. Ponemos $q = 1 - p = 25/35$.

   Podemos ahora pensar que la sucesión de lanzamientos de los dados es una sucesión de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 11/36$. El número de lanzamientos L necesarios hasta obtener el primer seis sigue una distribución geométrica de parámetro p:

   $$P(L = k) = q^{k-1}p$$

   a) Para lanzar el primer seis en el tercer intento, los dos primeros intentos deben haber resultado en fracasos y el tercero en éxito, por lo que la probabilidad que buscamos es

   $$q^2 p = \Big(\frac{25}{36}\Big)^2 \frac{11}{36} = \frac{6875}{46656} \approx 0.147$$

   b) Sea A el evento 'necesitamos más de tres intentos para obtener un seis'. Tenemos

   $$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) = 1 - P(L = 1) - P(L = 2) - P(L = 3) \\ &= 1 - \frac{11}{36} - \frac{25}{36}\frac{11}{36} - \Big(\frac{25}{36}\Big)^2 \frac{11}{36} \\ &= \frac{15625}{46656} \approx 0.335 \end{aligned}$$

   c) Para responder esta pregunta debemos sumar las probabilidades $P(L = k)$ hasta obtener un valor mayor a 0.95. Vamos a hacer esto en general, para una variable geoḿetrica con parámetro p y luego sustituimos por los valores particulares de la pregunta. Queremos el menor valor de r para el cual

   $$p + qp + q^2p + \cdots + q^{r-1}p \geq 0.95$$

Pero

$$p(1+q^2+\cdots+q^{r-1}) = p\Big(\frac{1-q^r}{1-q}\Big) = 1-q^r$$

Por lo tanto queremos el menor valor de r tal que

$$1-q^r \geq 0.95 \qquad \Leftrightarrow \qquad q^r \leq 0.05$$

Tomando logaritmos obtenemos que r es el menor entero que satisface

$$r \geq \log 0.05/\log q$$

Sustituyendo por ell valor $q = 25/36$ obtenemos que $r = 9$.

d) Para hallar esta probabilidad tenemos que sumar $P(L = k)$ sobre todos los valores pares de k:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} P(L=2k) &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k-1}p = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(q^2)^k \\ &= \frac{p}{q}\Big(\frac{1}{1-q^2}-1\Big) = \frac{pq}{1-q^2} \\ &= \frac{q}{1+q} = \frac{25}{61} \approx 0.41\end{aligned}$$

2. (**2 ptos.**)

a) Demuestre que $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$. Ayuda: Sea x un elemento de un conjunto A de tamaño $2n$. Cuente los subconjuntos de A de n elementos que incluyen a x y los que lo excluyen.

b) Demuestre que para m, n enteros, $r \leq m \wedge n$,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}. \tag{1}$$

Ayuda: Considere un conjunto que tiene m objetos de tipo a y n de tipo b. ¿Cuántos subconjuntos de r elementos se pueden formar?

Demostración. a) Siguiendo la sugerencia, consideramos un elemento x de conjunto A de $2n$ elementos. Sabemos que el número de subconjuntos de tamaño n de A es

$$\binom{2n}{n}$$

También podemos contar el número de subconjunto de A de tamaño n, contando los que tienen al elemento x y los que no lo tienen. Para contar los que tienen a x necesitamos escoger $n-1$ elementos de los $2n-1$ elementos de A que no son x, y esto lo podemos hacer de

$$\binom{2n-1}{n-1}$$

maneras. Por otro lado, para contar los que no tienen a x tenemos que escoger n elementos de los $2n-1$ elementos de A que son distintos de x. Esto es

$$\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$$

Resumiendo,

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$$

Otra manera de hacerlo es desarrollar estos números combinatorios:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$2\binom{2n-1}{n-1} = 2\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{2n(2n-1)!}{n!(n-1)!n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

b) Sea A un conjunto con $m+n$ elementos. Podemos formar

$$\binom{m+n}{r}$$

subconjuntos de tamaño r a partir de los elementos de A. Vamos a contar el número de subconjuntos de A de otra manera. Dividimos A en dos partes, m elementos que llamamos de tipo a y n, que llamamos de tipo b y tomamos $r \leq m \wedge n$. Ahora podemos contar los subconjuntos de A de tamaño r de otra manera: teniendo en cuenta cuántos de cada tipo hay en los subconjuntos que vamos formando. De esta manera hay

- $\binom{m}{0}\binom{n}{k}$ subconjuntos de tamaño r que tienen todos sus elementos de tipo b,
- $\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}$ subconjuntos de tamaño r que tienen un elemento de tipo a y el resto de tipo b,
- $\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}$ subconjuntos de tamaño r que tienen dos elementos de tipo a y el resto de tipo b,

y así sucesivamente. Si sumamos todas estas posibilidades obtenemos la suma que aparece en el lado derecho de (1).

3. (**2 ptos.**) Un amigo selecciona al azar y sin reposición, dos cartas de un juego de 52 cartas. Determina la probabilidad condicional de que ambas cartas sean ases si tu amigo te da la siguiente información:

a) Una de las cartas es el as de trebol.

b) La primera de las cartas seleccionadas es un as.

c) La segunda de las cartas seleccionadas es un as.

d) Alguna de las cartas seleccionadas es un as.

Respuesta. Llamemos $2A$ al evento 'ambas cartas son ases', B: 'Una de las cartas es el As de trebol', A_i: 'La carta i es un As' y C: 'Alguna de las cartas seleccionadas es un As'. Usaremos también la notación $a\clubsuit, a\blacklozenge, a\heartsuit$ y $a\spadesuit$ para los ases del juego de baraja.

Tomamos como espacio muestral al conjunto de los pares ordenados de cartas (X, Y), donde X, Y son cartas. Hay $52 \times 51 = 2,652$ pares posibles. Podemos describir los eventos de interés de la siguiente manera:

- $2A$ contiene los doce pares ordenados de ases que podemos formar sin repetición.
- B es el conjunto de los pares $(a\clubsuit, Z)$ o $(Z, a\clubsuit)$ donde Z es cualquier carta distinta de $a\clubsuit$. Como hay 51 valores posibles para Z hay un total de $2 \times 51 = 102$ elementos en este evento.
- A_1 es el conjunto de los pares $(a\clubsuit, Z_\clubsuit)$, $(a\blacklozenge, Z_\blacklozenge)$, $(a\heartsuit, Z_\heartsuit)$ o $(a\spadesuit, Z_\spadesuit)$ donde, en cada caso, la componente Z corresponde a todas las cartas distintas a la carta en la primera posición del vector. Por ejemplo, $Z_\spadesuit$ puede ser cualquiera de las 51 cartas distintas al $a\spadesuit$. Tenemos en total $4 \times 51 = 204$ resultados en este conjunto.
- La descripción de A_2 es similar a la de A_1 intercambiando primera y segunda componente.
- El conjunto C lo describimos de la siguiente manera: es la unión del conjunto $2A$ con el conjunto D formado por pares de la forma (a_*, Z) o $(Z; a_*)$ donde a_* denota alguno de los cuatro ases mientras que Z denota una de las 48 cartas que no son ases. Ya sabemos que el conjunto $2A$ tiene 12 elementos y el conjunto D tiene $2 \times 4 \times 48 = 384$ resultados, por lo que C tiene en total 396 elementos.

a) $P(2A|B) = P(2A \cap B)/P(B)$. El conjunto $2A \cap B$ tiene como elementos los pares de ases que incluyen al As de trebol como una de sus componentes. En total hay 6 pares con estas características, por lo que

$$P(2A|B) = \frac{P(2A \cap B)}{P(B)} = \frac{6/2652}{102/2652} = \frac{6}{102} = \frac{1}{17} \approx 0.059$$

b)

$$P(2A|A_1) = \frac{P(2A \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(2A)}{P(A_1)} = \frac{12/2652}{204/2652} = \frac{12}{204} = \frac{1}{17} \approx 0.059$$

c)

$$P(2A|A_2) = \frac{P(2A \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(2A)}{P(A_2)} = \frac{12/2652}{204/2652} = \frac{12}{204} = \frac{1}{17} \approx 0.059$$

d)

$$P(2A|C) = \frac{P(2A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(2A)}{P(C)} = \frac{12/2652}{396/2652} = \frac{12}{396} = \frac{1}{33} \approx 0.03$$

4. (**2 ptos.**) Una mano de POKER consiste de cinco cartas tomadas de un juego de 52 cartas.

   a) ¿Cuántas manos de POKER se pueden obtener?

   b) ¿De cuántas maneras se puede obtener una escalera o corrida (cinco cartas en orden, sin importar la pinta)?

   c) ¿De cuántas maneras se puede obtener un par y un trío (full)?

   d) ¿De cuántas maneras se puede obtener un poker (cuatro cartas con el mismo valor)?

   Respuesta. a) Tenemos que escoger 5 cartas de 52, sin importar el orden. Esto lo podemos hacer de $\binom{52}{5} = 2,598,960$ maneras.

   b) En una escalera el As puede iniciar o terminar la escalera, de modo que tenemos que escoger cinco símbolos sucesivos en el arreglo

   $$A\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ A$$

   El valor inicial en la escalera puede ser cualquiera del A al 10 y luego para cada una de las cinco cartas que fran la escalera tenemos 4 posibilidades. Esto hace un total de

   $$10 \times 4^5 = 10,240.$$

   c) El valor del trío lo podemos escoger de 13 maneras y las tres cartas del trío de $\binom{4}{3}$ maneras. El valor del par lo podemos escoger de 12 maneras y las cartas del par de $\binom{4}{2}$ formas. En total tenemos

   $$13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3,744$$

   maneras de escoger un trío y un par.

   d) El valor de la carta que se va a repetir lo podemos escoger de 13 maneras y las cuatros cartas con este valor lo podemos escoger de una sola manera. Para la carta que no forma parte del POKER hay 12 valores posibles y una vez escogido el valor hay 4 posibles maneras de escogerlo. En total tenemos

   $$13 \times 12 \times 4 = 624$$

   maneras de escoger un POKER.

5. (**2 ptos.**) Una compañía tiene tres plantas de fabricación de envases de plástico. La planta A tiene una proporción de objetos defectuosos de 1 % en su producción, la planta B produce 2 % de objetos defectuosos y la planta C produce 3 % de defectuosos. La planta A produce 50 % de la producción total de la compañía, la planta B produce el 30 % y el resto es producido por la planta C.

   a) Si seleccionamos un objeto al azar entre toda la producción de la compañía, ¿Cuál es la probabilidad de que el objeto sea defectuoso?

   b) Si seleccionamos un objeto defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la planta C?

   c) Seleccionamos al azar y con igual probabilidad una de las tres plantas y en ella seleccionamos al azar un objeto, que resulta ser defectuoso. Si seleccionamos un segundo objeto, ¿Cuál es la probabilidad de que también resulte defectuoso? (puedes suponer que la segunda selección se hace con reposición).

Respuesta. a) La probabilidad de obtener un defectuoso la podemos calcular usando la ley de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.01 \times 0.5 + 0.02 \times 0.3 + 0.03 \times 0.2 = 0.017 \end{aligned}$$

b) Usando el Teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(C|D) &= \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} \\ &= \frac{0.006}{0.017} \approx 0.353 \end{aligned}$$

c) Ahora escogemos la fábrica de manera uniforme (cada una tiene probabilidad 1/3 de ser escogida). La probabilidad de seleccionar un objeto defectuoso en la primer extracción (D_1) es ahora

$$\begin{aligned} P(D_1) &= P(D_1|A)P(A) + P(D_1|B)P(B) + P(D_1|C)P(C) \\ &= 0.01 \times \frac{1}{3} + 0.02 \times \frac{1}{3} + 0.03 \times \frac{1}{3} = 0.02 \end{aligned}$$

La probabilidad de que el segundo objeto seleccionado también sea defectuoso es

$$P(D_2|D_1) = \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1)}$$

y para calcular el numerador tenemos

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1 \cap D_2|A)P(A) + P(D_1 \cap D_2|B)P(B) + P(D_1 \cap D_2|C)P(C) \\ &= (0.01)^2 \times \frac{1}{3} + (0.02)^2 \times \frac{1}{3} + (0.03)^2 \times \frac{1}{3} = 0.0000466 \end{aligned}$$

Finalmente

$$P(D_2|D_1) = \frac{0.000466}{0.02} = 0.0233$$